

**Svar och lösningsförslag till ks3, 24 mars 2014,
i SF1662 Diskret matematik för CLGYM1, TSVDK2**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om man singlar ett (ärligt) mynt fem gånger, är sannolikheten $\frac{11}{16}$ att antalet "klave" är ett primtal. [Nej, den är $\frac{1}{2^5}((\binom{5}{2}) + (\binom{5}{3}) + (\binom{5}{5})) = \frac{1}{2^5}(10 + 10 + 1) = \frac{21}{32}$.]		×
b) 5 olika böcker kan fördelas bland 3 olika personer, så att ingen blir utan bok, på precis 150 sätt. [Ja. Surjektioner, så $3! \cdot S(5, 3) = 6 \cdot 25$. $S(5, 3)$ fås med rekursionen eller som $\binom{5}{2} + \frac{1}{2} \binom{5}{2, 2, 1}$.]	×	
c) Tre olika personer kan välja varsin bland fem olika böcker på precis 60 sätt. [Ja. Injektioner, så $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.]	×	
d) Antalet "ord" som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet 'ABRAKADABRA' är $\frac{11!}{4 \cdot 5!}$. [Ja, multinomialtalet $\binom{11}{5, 2, 1, 1, 2} = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{11!}{4 \cdot 5!} (= 83\,160)$.]	×	
e) Om $\pi, \sigma \in S_n$ är udda permutationer, måste $\sigma\pi\sigma^{-1}$ vara en jämn permutation. [Nej, den är liksom π udda. $\sigma\pi$ är jämn.]		×
f) Antalet $\pi \in S_9$ (permutationer av $\{1, 2, \dots, 9\}$) som tar jämna tal till jämna tal är $5 \cdot 24^2$. [Ja. Jämna till jämna, $4!$ olika. Udda till udda, $5!$ olika. Totalt $4! \cdot 5! = 5 \cdot (4!)^2 = 5 \cdot 24^2 (= 2880)$.]	×	

2a) (1p) Vi söker för $n \in \mathbb{Z}_+$ summan $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n}$.

Lösning:

Summan är $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k$, vilket enligt binomialsatsen är $(1 + 2)^n = 3^n$.

Svar: Summan är 3^n .

b) (1p) Vi söker antalet sätt att fördela 100 kronor bland 13 personer.

Lösning:

Oordnat (identiska kronor) val (bland personerna) med upprepning. Bland $100 + 12$ positioner väljs 12 för väggar mellan personernas förmögenheter, kronorna i övriga positioner. Det kan göras på $\binom{100+12}{12} = \frac{112!}{12! \cdot 100!}$ sätt.

Svar: Antalet sätt är $\frac{112!}{12! \cdot 100!} (= 4\,416\,904\,685\,676\,756)$.

c) (1p) I mängden $\mathcal{M}$ (med $|\mathcal{M}| \geq 2$) av personer är relationen "att känna någon" en symmetrisk relation och ingen känner sig själv. Vi skall förklara varför det finns två i $\mathcal{M}$ som känner lika många (i $\mathcal{M}$).

Lösning:

Postfacksprincipen. Med $|\mathcal{M}| = n$ är tillgängliga värden för antalet en i $\mathcal{M}$ känner $0, 1, \dots, n-1$, totalt n st. **Men** om någon känner $n-1$ st (dvs alla utom sig själv), kan inte en annan känna 0 st. Det betyder att (då $|\mathcal{M}| \geq 2$) högst ett av värdena 0 och $n-1$ kan förekomma och postfacksprincipen ger att två personer känner lika många (antalen för de n i $\mathcal{M}$ väljs bland de $n-1$ värdena $0/n-1, 1, 2, \dots, n-2$). **Saken är klar.**

3) (3p) Vi söker antalet mönster med alla tre färgerna rött, gult och blått, då av totalt 44 mönster 16 innehåller rött, 12 gult, 17 blått, 5 både rött och gult, 4 både gult och blått, 7 både rött och blått, medan 12 mönster inte innehåller någon av rött, gult och blått.

Lösning:

Vi låter X vara mängden av alla mönster och R, G, B mängderna av dem med rött, gult respektive blått. Med de givna värdena ger principen om inklusion och exklusion att $12 = |X \setminus (R \cup G \cup B)| = |X| - (|R| + |G| + |B|) + (|R \cap G| + |G \cap B| + |R \cap B|) - |R \cap G \cap B| = 44 - (16 + 12 + 17) + (5 + 4 + 7) - |R \cap G \cap B| = 15 - |R \cap G \cap B|$, så det sökta $|R \cap G \cap B| = 3$.

Svar: Precis 3 av mönstren innehåller alla de tre färgerna.

4) (a, 2p) $\pi, \sigma \in S_6$ ges av $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.
 Vi söker π och $\pi\sigma^{-1}$ i cykelform. (b, 1p) $\tau \in S_6$ ges av $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & x & 2 & y & 1 \end{bmatrix}$.
 Vi söker x och y så att τ är en udda permutation.

Lösning:

a) $\pi(1) = 5, \pi(5) = 2, \pi(2) = 4, \dots$ ger i cykelform $\pi = (1\ 5\ 2\ 4)(3\ 6)$.
 P.s.s. $\sigma = (1\ 4\ 6)(2\ 3)(5)$, så (cyklerna baklänges) $\sigma^{-1} = (1\ 6\ 4)(2\ 3)(5)$. Det ger $\pi\sigma^{-1} = (1\ 5\ 2\ 4)(3\ 6)(1\ 6\ 4)(2\ 3)(5) = (1\ 3\ 4\ 5\ 2\ 6)$.

b) x och y måste vara 5 och 6 (i någon ordning), eftersom τ är en bijektion.
 $x = 5, y = 6$ ger $\tau = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$, en jämn permutation (ett jämnt antal cykler (2) av jämn längd). $x = 6, y = 5$ ger $\tau = (1\ 3\ 6)(2\ 4)(5)$, en udda permutation (ett udda antal cykler (1) av jämn längd). Så $x = 6, y = 5$.

Eller som i boken: antalet inversioner i τ :s andra rad skall vara udda etc.

Svar a: $\pi = (1\ 5\ 2\ 4)(3\ 6)$ och $\pi\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 5\ 2\ 6)$, b: $x = 6, y = 5$.

5) Bland 24 elever väljs 17 ut och de fördelas bland 6 idrottsgrenar. Vi söker antalet sätt det kan ske (a, 2p) utan andra villkor och (b, 1p) om dessutom minst en skall delta i höjdhoppet.

Lösning:

I a) kan de 17 väljas på $\binom{24}{17}$ sätt och var och en kan delta i en av 6 grenar, totalt 6^{17} möjligheter. Totalt (multiplikationsprincipen) $\binom{24}{17} \cdot 6^{17} = \frac{24!}{17! \cdot 7!} \cdot 6^{17}$ sätt.
 I b) skall vi ta bort de fördelningar då ingen deltar i höjdhoppet, dvs då de fördelas på bara 5 grenar, så $\binom{24}{17} \cdot 5^{17} = \frac{24!}{17! \cdot 7!} \cdot 5^{17}$ stycken. Det blir alltså $\binom{24}{17} \cdot 6^{17} - \binom{24}{17} \cdot 5^{17} = \frac{24!}{17! \cdot 7!} (6^{17} - 5^{17})$ möjligheter.

Svar a: $\frac{24!}{17! \cdot 7!} \cdot 6^{17} (= 5\ 858\ 384\ 540\ 460\ 908\ 544)$ sätt,

b: $\frac{24!}{17! \cdot 7!} (6^{17} - 5^{17}) (= 5\ 594\ 328\ 143\ 976\ 533\ 544)$ sätt.
