Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks2, 17 februari 2014,
i SF1662 Diskret matematik för CLGYM1, TSVDK2

		sant	falskt
1)	(För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)		
a)	Om $a_0 = 4$, $a_{n+1} = 2(a_n + 1)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$, gäller $a_n \equiv 1 \pmod 3$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ [Jadå. Induktion.]	×	
b)	$(A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus C) = (A \cup B) \smallsetminus (B \cap C)$ är sant för alla mängder A, B, C. [Ja, ses t.ex. med venndiagram.]	×	
c)	$(A \wedge B) \vee C \vDash A \to B$ för atomära sentenser A, B, C. [Nej, tolkningen $A, C : 1$, $B : 0$ ger $(A \wedge B) \vee C : 1$, $A \to B : 0$.]		×
d)	$(x\mathcal{R}y$ och $z\mathcal{R}y) \Rightarrow z\mathcal{R}x$ gäller säkert för alla $x, y, z \in X$ om $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på X. [Ja, det följer av att $\mathcal{R}$ är symmetrisk och transitiv.]	×	
e)	Om $f : X \to Y$ uppfyller $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in X$ är den säkert injektiv. [Nej, borde stå $\Leftarrow$.]		×
f)	Mängden av positiva reella tal och mängden av rationella tal har samma kardinalitet, dvs $\lvert\mathbb{R}_+\rvert = \lvert\mathbb{Q}\rvert$. [Nej, $\mathbb{R}_+$ överuppräknelig, $\mathbb{Q}$ uppräknelig, så ingen bijektion mellan.]		×

2a) (1p) Vi söker $|A \cap B|$, $|\mathcal{P}(A) \cap B|$, $|A \cap \mathcal{P}(B)|$ då $A = \{1, 2, \varnothing\}$, $B = \{2, A\}$.

Lösning:

$A \cap B = \{2\}$, $\mathcal{P}(A) \cap B = \{A\}$, $A \cap \mathcal{P}(B) = \{\varnothing\}$ (och $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{2\}\}$), så

Svar: $\boldsymbol{|A \cap B| = |\mathcal{P}(A) \cap B| = |A \cap \mathcal{P}(B)| = 1.}$

2b) (1p) Vi söker en binär relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ sådan att $\mathcal{R}$ är reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk.

Lösning:

Varje partialordning $\mathcal{R}$ som inte är symmetrisk går bra. Ett enkelt val är $\mathcal{R} = \leq$. Då är $\mathcal{R}$ reflexiv ($x \leq x$ för alla $x \in \mathbb{Z}$), transitiv ($(x \leq y$ och $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ för alla $x, y, z \in \mathbb{Z}$) och inte symmetrisk ($x \leq y \not\Rightarrow y \leq x$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$, eftersom $0 \leq 1$, $1 \not\leq 0$).

Svar: T.ex. $\boldsymbol{\mathcal{R} = \leq}$**.** ($\geq$ går lika bra.)

2c) (1p) Vi söker en mängd X och en funktion $f : X \to X$, där f är injektiv men inte surjektiv.

Lösning:

X måste vara oändlig, annars implicerar de två egenskaperna varandra. Man kan ta $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, de naturliga talen, och f given av $f(x) = x + 1$. f är injektiv ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$), men inte surjektiv ($f(x) \neq 0$ för alla $x \in X$).

Svar: T.ex. $\boldsymbol{X = \mathbb{N},\ f(x) = x + 1.}$

---

3) $f : X \to X$ och $\mathcal{R}$ ges av $x\mathcal{R}y$ omm $y = f(x)$. Vi söker villkoren på f för att $\mathcal{R}$ skall vara (a, 1p) reflexiv, (b, 1p) symmetrisk och (c, 1p) transitiv.

Lösning:

a. $\mathcal{R}$ är reflexiv omm $x\mathcal{R}x$ för alla $x \in X$, men $x\mathcal{R}y$ omm $y = f(x)$, så $x = f(x)$ för alla $x \in X$, dvs $f = id_X$ (identitetsfunktionen på X).
b. $\mathcal{R}$ är symmetrisk omm $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ för alla $x, y \in X$, dvs omm $y = f(x) \Rightarrow x = f(y)$, dvs $y = f(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ för alla $x, y \in X$, dvs omm $f = f^{-1}$.
c. $\mathcal{R}$ är transitiv omm $(x\mathcal{R}y \text{ och } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ för alla $x, y, z \in X$, dvs omm $(y = f(x) \text{ och } z = f(y)) \Rightarrow z = f(x)$ för alla $x, y, z \in X$, dvs omm $z = f(f(x)) \Rightarrow z = f(x)$ för alla $x, z \in X$, dvs omm $f(f(x)) = f(x)$ för alla $x \in X$, dvs $f = ff$, sammansättningen av f med sig själv. (Detta kallas att f är en **idempotent** funktion.)

Svar: Villkoren är a: $f = id_X$, b: $f = f^{-1}$, c: $f = ff$.

---

4) (3p) Vi skall med naturlig deduktion visa att $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \vdash \neg A$. Givna härledningsregler: premiss, antagande, DN, $\wedge$E, $\wedge$I, $\to$E, $\to$I, $\neg$E, $\neg$I.

Lösning:

1	(1)	$(A \to B) \wedge (A \to \neg B)$	premiss	
2	(2)	A	antagande	
1	(3)	$A \to B$	1	$\wedge$E
1,2	(4)	B	3,2	$\to$E
1	(5)	$A \to \neg B$	1	$\wedge$E
1,2	(6)	$\neg B$	5,2	$\to$E
1,2	(7)	$\perp$	6,4	$\neg$E
1	(8)	$\neg A$	2,7	$\neg$I

Saken är klar, ty slutsatsen på rad 8 beror bara av premissen.

---

5) (3p) Vi skall visa $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lösning:

Låt $P(n)$ vara påståendet $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
Vi använder matematisk induktion för att visa $P(n)$ för $n \in \mathbb{Z}_+ (= \{1, 2, 3, \ldots\})$.
Bas: $\text{VL}_1 = 1^2 = 1$, $\text{HL}_1 = \frac{1(2-1)(2+1)}{3} = 1$, så $P(1)$ är sann. **Basen är klar**.
Steg: Låt $k \in \mathbb{Z}_+$ och antag $P(k)$. Då är
$\text{VL}_{k+1} = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \text{VL}_k + (2k+1)^2 \overset{\text{ind.ant.}}{=} \text{HL}_k + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{2k+1}{3}(k(2k-1) + 3(2k+1)) = \frac{2k+1}{3}(2k^2 - k + 6k + 3) = \frac{2k+1}{3}(2k^2 + 5k + 3)$ och
$\text{HL}_{k+1} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} = \frac{2k+1}{3}(k+1)(2k+3) = \frac{2k+1}{3}(2k^2+5k+3)$, så $P(k+1)$.
Vi har därmed visat $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för alla $k \in \mathbb{Z}_+$. **Steget är klart**.
Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. **Saken är klar**.