

Matematik, KTH

B.Ek

Efternamn	förnamn	personnr

**Kontrollskrivning 2, må 17 februari 2014, 8.30–10.00,
i SF1662 Diskret matematik för CLGYM1, TSVDK2**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd (3p) uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

poäng uppg.1

	sant	falskt
a) Om $a_0 = 4$, $a_{n+1} = 2(a_n + 1)$ för $n = 0, 1, 2, \dots$, gäller $a_n \equiv 1 \pmod{3}$ för $n = 0, 1, 2, \dots$		
b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ är sant för alla mängder A, B, C .		
c) $(A \wedge B) \vee C \models A \rightarrow B$ för atomära sentenser A, B, C (dvs varje tolkning som gör $(A \wedge B) \vee C$ sann gör $A \rightarrow B$ sann).		
d) $(x\mathcal{R}y \text{ och } z\mathcal{R}y) \Rightarrow z\mathcal{R}x$ gäller säkert för alla $x, y, z \in X$ om $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på X .		
e) Om $f : X \rightarrow Y$ uppfyller $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in X$ är den säkert injektiv.		
f) Mängden av positiva reella tal och mängden av rationella tal har samma kardinalitet, dvs $ \mathbb{R}_+ = \mathbb{Q} $.		

Resultat på skrivningen:

Fylls i av rättaren

p 1	p 2	p 3	p 4	p 5	Σ p	G/U	bonus

SF1662 CLGYM1, TSVDK2, ks2 17.2-14

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Låt $A = \{1, 2, \emptyset\}$ och $B = \{2, A\}$. Ange (motivering krävs inte)

$$|A \cap B|, |\mathcal{P}(A) \cap B|, |A \cap \mathcal{P}(B)|.$$

$\mathcal{P}(X)$ är potensmängden till X ($\{Y \mid Y \subseteq X\}$) och $|X|$ antalet element i X .

$$|A \cap B| = \dots\dots \quad |\mathcal{P}(A) \cap B| = \dots\dots \quad |A \cap \mathcal{P}(B)| = \dots\dots$$

b) (1p) Finn en binär relation $\mathcal{R}$ på heltalen $\mathbb{Z}$ sådan att $\mathcal{R}$ är reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk.

c) (1p) Finn en mängd X och en funktion $f : X \rightarrow X$, sådana att f är injektiv men inte surjektiv.

Namn	poäng uppg.3

3) Om X är en mängd och $f : X \rightarrow X$ en funktion från X till X , låt $\mathcal{R}$ vara motsvarande binära relation på X , dvs

$$x\mathcal{R}y \text{ om och endast om } y = f(x).$$

I svaren på nedanstående frågor skall det framgå vad det innebär att en relation har respektive egenskap och motsvarande villkor för f skall uttryckas med sammansättning, inversfunktion, enkla funktioner eller liknande (det räcker alltså inte att bara "sätta in" $y = f(x)$ i villkoret för relationens egenskap).

a) (1p) Finn villkoret på f för att $\mathcal{R}$ skall vara **reflexiv**.

b) (1p) Finn villkoret på f för att $\mathcal{R}$ skall vara **symmetrisk**.

c) (1p) Finn villkoret på f för att $\mathcal{R}$ skall vara **transitiv**.

Härledningsregler för naturlig deduktion

Regel för premiss $j \quad (j) \quad p \quad \text{premiss}$ Regel för antagande $j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande}$ Regel för $\wedge$E: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad p \wedge q \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \wedge E \\ \text{(eller } q) \end{array}$ Regel för $\rightarrow$ E: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \rightarrow q \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad q \quad j, k \rightarrow E \end{array}$ Regel för $\neg$ E: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad \neg p \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad \perp \quad j, k \neg E \end{array}$	DN-regeln $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_n \quad (j) \quad \neg \neg p \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad p \quad j \quad \text{DN} \end{array}$ Regel för $\wedge$I: $\begin{array}{c} a_1, \dots, a_m \quad (j) \quad p \\ \vdots \\ b_1, \dots, b_n \quad (k) \quad q \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \quad (l) \quad p \wedge q \quad j, k \wedge I \end{array}$ Regel för $\rightarrow$ I: $\begin{array}{c} j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad q \\ \vdots \\ \{a_1, \dots, a_n\}/j \quad (l) \quad p \rightarrow q \quad j, k \rightarrow I \end{array}$ Regel för $\neg$ I: $\begin{array}{c} j \quad (j) \quad p \quad \text{antagande} \\ \vdots \\ a_1, \dots, a_n \quad (k) \quad \perp \\ \vdots \\ \{a_1, \dots, a_n\}/j \quad (l) \quad \neg p \quad j, k \neg I \end{array}$
---	---

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Visa med naturlig deduktion att

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \vdash \neg A.$$

Härledningsreglerna på motstående sida får användas.

Observera att varje rad måste motiveras med en regel från listan. Det är alltså inte tillåtet att ”forma om” sentenser med t.ex. boolesk algebra eller dra ”uppenbara” slutsatser utan att redovisa vilka härledningsregler som använts.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Visa, t.ex. med matematisk induktion, att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.