Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks1, 3 februari 2014,
i SF1662 Diskret matematik för CLGYM1, TSVDK2

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Om a, b, c är heltal och $a \mid b$, $c \mid b$ gäller säkert $a+c \mid 2b$. [Nej, inte alls. T.ex. inte för $a=1$, $b=c=2$ eller $a=b=-c=1$.]		×
b)	$\mathrm{sgd}(a, \mathrm{sgd}(b,c)) = \mathrm{sgd}(\mathrm{sgd}(a,b),c)$ för alla heltal a, b, c. [Ja, $\mathrm{sgd}(m,0)=\lvert m\rvert$, $\mathrm{sgd}(m,n)=\mathrm{sgd}(\lvert m\rvert,\lvert n\rvert)$ och räkna primfaktorer.]	×	
c)	$\mathrm{sgd}(a, \mathrm{mgm}(b,c)) = \mathrm{sgd}(\mathrm{mgm}(a,b),c)$ för alla heltal a, b, c. [Nejdå, $a=1$, $b=c=2$ ger motexempel.]		×
d)	Det finns precis 6 olika x i $\mathbb{Z}_{156}$ som uppfyller $48x=30$. [Nej, eftersom $\mathrm{sgd}(48,156)=12 \nmid 30$ finns det inget sådant x.]		×
e)	För alla x som är inverterbara i $\mathbb{Z}_m$ är $m-x$ också det. [Ja, eftersom $\mathrm{sgd}(x,m)=\mathrm{sgd}(x-m,m)=\mathrm{sgd}(m-x,m)$ osv.]	×	
f)	Om a, b är heltal, p ett primtal och $p \mid ab$ måste precis en av $p \mid a$ och $p \mid b$ gälla. [Nej, motex. $p=a=b=2$.]		×

2a) (1p) Vi skall skriva $(2014)_{10}$ i bas 12.

Lösning:

$2014 = 167 \cdot 12 + 10$, $167 = 13 \cdot 12 + 11$, $13 = 1 \cdot 12 + 1$, $1 = 0 \cdot 12 + 1$, så $(2014)_{10} = (11BA)_{12}$.

Svar: 2014 skrivs i bas 12 som $11BA$.

---

b) (1p) Vi söker $16^2 + 15 \cdot 14^{-1}$ i $\mathbb{Z}_{19}$.

Lösning:

Eftersom $16^2 \equiv_{19} (-3)^2 = 9$ är $16^2 = 9$ i $\mathbb{Z}_{19}$.
$1 = 4 \cdot 5 = (-4)\cdot(-5) = 15 \cdot 14$ i $\mathbb{Z}_{19}$, så $14^{-1} = 15$ (man kan förstås också använda Euklides algoritm).
Det ger $16^2 + 15 \cdot 14^{-1} = 16^2 + 15^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 6$ i $\mathbb{Z}_{19}$.

Svar: $16^2 + 15 \cdot 14^{-1} = 6$ i $\mathbb{Z}_{19}$.

---

c) (1p) Vi söker alla invererbara element i $\mathbb{Z}_{42}$.

Lösning:

x är inverterbart i $\mathbb{Z}_m$ omm $\mathrm{sgd}(x,m) = 1$, så eftersom $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ är de inverterbara elementen precis de bland 0, 1, 2, ..., 41 som inte är delbara med 2, 3 eller 7. De är 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41. (Jfr uppgift 1e!)

Svar: Inverterbara är 1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37 och 41.

3) Vi skall (a, 1p) avgöra om 19, 671 och 1376 är inverterbara i $\mathbb{Z}_{2014}$ och (b, 2p) finna 503^{-1} i $\mathbb{Z}_{2014}$.

Lösning:

a. x är inverterbart i $\mathbb{Z}_m$ omm $\mathrm{sgd}(x, m) = 1$, så eftersom $2014 = 106 \cdot 19$ (så $\mathrm{sgd}(19, 2014) = 19 \neq 1$), $2014 = 3 \cdot 671 + 1$ (så $\mathrm{sgd}(671, 2014) = 1$) och $2 \mid 1376$, $2 \mid 2014$ (så $\mathrm{sgd}(1376, 2014) \neq 1$) är 671 inverterbart i $\mathbb{Z}_{2014}$, medan 19 och 1376 inte är det.
Euklides algoritm: $2014 = 4 \cdot 503 + 2$, $503 = 251 \cdot 2 + 1$, så $1 = 503 - 251 \cdot 2 = 503 - 251(2014 - 4 \cdot 503) = -251 \cdot 2014 + 1005 \cdot 503$ och $503^{-1} = 1005$ i $\mathbb{Z}_{2014}$.

Svar a: 671 är inverterbart i $\mathbb{Z}_{2014}$, men det är varken 19 eller 1376,
b: $503^{-1} = 1005$ i $\mathbb{Z}_{2014}$.

---

4) Vi söker (a, 1p) $\mathrm{sgd}(27, 39)$ och $\mathrm{mgm}(27, 39)$ och (b, 2p) heltal $a > 1000$ och b med a så litet som möjligt och $\mathrm{sgd}(27, 39) = a \cdot 27 + b \cdot 39$.

Lösning:

a. sgd:n fås med Euklides algoritm:
$39 = 1 \cdot 27 + 12$, $27 = 2 \cdot 12 + 3$, $12 = 4 \cdot 3 + 0$, så $\mathrm{sgd}(27, 39) = 3$ (kan ses direkt).
Eftersom $\mathrm{mgm}(m, n) = \frac{|mn|}{\mathrm{sgd}(m,n)}$ ger det $\mathrm{mgm}(27, 39) = \frac{27 \cdot 39}{3} = 9 \cdot 39 = 351$.
b. Vi söker först alla a och b som uppfyller $27a + 39b = 3$ och löser ut 3 ovan. Det ger $3 = 27 - 2 \cdot 12 = 27 - 2(39 - 27) = -2 \cdot 39 + 3 \cdot 27$, så en lösning är $\begin{cases} a_0 = 3 \\ b_0 = -2. \end{cases}$ a, b är en lösning omm $27(a - a_0) + 39(b - b_0) = 0$ omm $27(a - a_0) = -39(b - b_0)$ är en gemensam multipel till 27 och 39 omm $27(a - a_0) = -39(b - b_0) = k \cdot \mathrm{mgm}(27, 39) = \frac{27 \cdot 39}{3}$, för något heltal k. Alla heltalslösningar till ekvationen ges då av $\begin{cases} a = 3 + 13k \\ b = -2 - 9k, \end{cases}$ k ett heltal. Det minsta $a > 1000$ fås med $k = 77$: $a = 3 + 13 \cdot 77 = 1004$ och $b = -2 - 9 \cdot 77 = -695$.

Svar a: $\mathrm{sgd}(27, 39) = 3$, $\mathrm{mgm}(27, 39) = 351$,
b: De sökta a, b är $a = 1004$, $b = -695$.

---

5) Vi söker (a, 0p) alla heltal x med $x \equiv_9 5$ och (b, 3p) alla heltal x med både $x \equiv_9 5$ och $x \equiv_{26} 20$.

Lösning:

a. $x \equiv_9 5$ betyder precis att $9 \mid (x - 5)$, dvs $\boldsymbol{x = 5 + 9y}$, för något heltal y.
b. Det första villkoret ger enligt a) att $x = 5 + 9y$ för något heltal y. Det andra villkoret bestämmer vilka y som är möjliga.
$5 + 9y \equiv_{26} 20 \;\Leftrightarrow\; 9y \equiv_{26} 15 \;\Leftrightarrow\; y \equiv_{26} 3 \cdot 9y \equiv_{26} 3 \cdot 15 = 45 \equiv_{26} 19$ (sista $\Leftrightarrow$ eftersom $\mathrm{sgd}(26, 3) = 1$, så $26 \mid z$ omm $26 \mid 3z$ — man kan också beräkna $9^{-1} = 3$ i $\mathbb{Z}_{26}$).
Alla y som ger lösningar till båda relationerna är alltså $y = 19 + 26k$, k heltal.
De motsvarar $x = 5 + 9y = 5 + 9(19 + 26k)$, så $\boldsymbol{x = 176 + 234k}$.

Svar a: $x = 5 + 9y$, b: $x = 176 + 234k$, där y, k är godtyckliga heltal.
