

**Svar och lösningsförslag till ks5, 17 maj 2013,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om graferna G_1 och G_2 är isomorfa, är G_1 planär om och endast om G_2 är det. [Jadå. En plan framställning av den ena ger en av den andra.]	×	
b) Om $G = (V, E)$ är en graf med $ V $ ett primtal ≥ 5 har minst ett hörn (en nod) i G jämn valens (grad). [Ja. Antalet hörn med udda valens är jämnt och $ V $ udda.]	×	
c) Om grafen $G = (V, E)$ är hamiltonsk, måste varje hamiltoncykel i G innehålla precis $ V - 1$ kanter. [Nej, $ V $ kanter.]		×
d) Om $T_1 = (V_1, E_1)$ och $T_2 = (V_2, E_2)$ båda är träd med minst ett hörn gäller säkert att $ V_1 + E_2 = V_2 + E_1 $. [Ja. För sådana träd gäller $ E_i = V_i - 1$.]	×	
e) Om en plan graf $G = (V, E)$ har $ E = V \neq 0$, delar den säkert in planet i precis 2 ytor (fasetter). [Nej, $v - e + r - c = 1$, så antalet ytor är antalet komponenter +1.]		×
f) En graf G är planär om och endast om dess kromatiska tal $\chi(G) \leq 4$. [Nej. $\chi(G) \leq 4$ är nödvändigt, men inte tillräckligt, för planaritet. Motex: $\chi(K_{3,3}) = 2$ och $K_{3,3}$ är inte planär.]		×

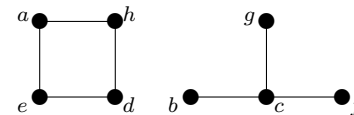
2a) (1p) Vi söker $x, y, z \in E$ sådana att man får ett träd genom att ta bort $\{x, y\}$ och lägga till $\{x, z\}$ i grafen $G = (V, E)$ med denna granntabell:

a	b	c	d	e	f	g	h
e	c	b	e	a	c	c	a
h		f	h	d			d
			g				

Lösning:

Grafen ser ut som till höger.

Vi får ett träd genom att "koppla loss" en kant i cykeln och fästa den i den andra komponenten.



Svar: En möjlighet (av många) är att byta $\{d, h\}$ mot $\{d, b\}$.

b) (1p) Vi skall avgöra för vilka $m, n \in \mathbb{Z}_+$ som $K_{m,n}$ är eulersk.

Lösning:

$K_{m,n}$ har hörn med valenser m och n , men inga andra. Eftersom $K_{m,n}$ är sammanhängande är den eulersk om och endast om alla valenser är jämna, så

Svar: $K_{m,n}$ är eulersk om och endast om m och n båda är jämna.

c) (1p) Vi skall förklara vad den duala grafen $G^\perp$ till en plan graf G är.

Lösning:

$G^\perp$ har ett hörn i var och en av G 's ytor. Genom varje kant e i G går en kant i $G^\perp$ mellan hörnen som svarar mot ytorna på ömse sidor om e (ev. samma yta).

3) (3p) Vi skall avgöra G_1 :

a	b	c	d	e	f
d	d	e	a	b	a
f	e	f	b	c	b
	f			c	

 G_2 :

1	2	3	4	5	6
3	4	1	2	1	1
5	5	4	3	2	3
6		6			

om G_1 och G_2 med givna
granntabeller är isomorfa.

Lösning:

Graferna kan ritas som var sin sexhörning med en diagonal var. De är inte isomorfa, ty G_1 är bipartit ($X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e, f\}$) och det är inte G_2 (hörnen 1, 3, 6 är parvis grannar). (Eller: G_2 , men inte G_1 , innehåller en triangel.)

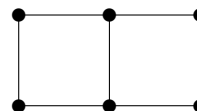
Svar: Nej, G_1 och G_2 är inte isomorfa.

4) (3p) Vi söker antalet ytor en sammanhängande planär graf med 4 hörn med valens 3, 3 med valens 4 och 2 med valens 5 (och inga andra hörn) delar in en sfär i, då den ritas utan korsande kanter.

Lösning:

Enligt Eulers polyederformel är (vanliga beteckningar) $v - e + r = 2$, så $r = 2 - v + e$. Här är $v = 4 + 3 + 2 = 9$ och $e = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \delta(x) = \frac{1}{2}(4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$, så $r = 2 - 9 + 17 = 10$. **Svar: Antalet ytor är 10.**

5) För grafen G i figuren söker vi (a, 1p) $P_G(0)$, $P_G(1)$ och $P_G(2)$, (b, 1p) grafer G_1 och G_2 med $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$ och (c, 1p) $P_G(\lambda)$.

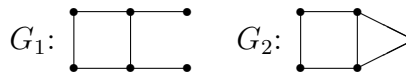


Lösning:

Grafen är bipartit med $E \neq \emptyset$, så $\chi(G) = 2$ och $P_G(0) = P_G(1) = 0$, $P_G(2) = 2$ (om man väljer färg på ett hörn bestäms allas).

Med vanliga beteckningar är

$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$. Vi tar (t.ex.):



Med samma rekursion en gång till får man $P_G(\lambda) = P_{G'}(\lambda) - 2 \cdot P_{G''}(\lambda) + P_{G'''}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^5 - 2\lambda(\lambda - 1)^3(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = \dots =$

$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda^4 - 6\lambda^3 + 15\lambda^2 - 18\lambda + 9)$. (Kan visas på flera sätt. Med metoden i ex 6, ö 12, och $P_{C_4}(\lambda) = (\lambda - 1)^4 + (\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ får man $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)^2$.)



Svar a: $P_G(0) = P_G(1) = 0$, $P_G(2) = 2$, **b:** G_1 , G_2 som ovan (t.ex.),
c: $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^4 - 6\lambda^3 + 15\lambda^2 - 18\lambda + 9)$.