

**Svar och lösningsförslag till ks3, 9 april 2013,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Antalet sätt fyra personer kan välja var sin av 11 olika kakor är precis 7920. [Ja, injektioner personer $\rightarrow$ kakor, $(11)_4$ st.]	×	
b) Då man slår med två (rättvisa) tärningar är sannolikheten att få totalt minst 11 ögon $\frac{2}{11}$. [Nej, den är $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.]		×
c) Antalet sätt att fördela 11 identiska kakor bland fyra personer är $\frac{14!}{4! \cdot 10!}$. [Nej, det är $\frac{14!}{3! \cdot 11!} (= 364)$.]		×
d) Antalet "ord" som kan bildas genom att kasta om bokstäverna i ordet 'ALLDELES' är $\frac{8!}{12}$. [Ja, multinomialtalet $(1,1,2,3,1) = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8!}{12} (= 3360)$.]	×	
e) Antalet transpositioner i S_n (mängden av permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$) är $\frac{1}{2}n(n-1)$. [Ja, antalet är $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.]	×	
f) För varje udda permutation π av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ är $\pi^2(k) = k$ för något $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. [Ja. Möjliga cykelstrukturer är $[14], [23], [1^3 2]$, så minst en 1-cykel i π^2 .]	×	

2a) (1p) Vi söker antalet **surjektioner** $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$.

Lösning:

Antalet ges av $4! \cdot S(5, 4)$. $S(5, 4)$ fås antingen med "Stirlings triangel" eller genom att observera att varje partition av en 5-mängd i 4 delar bestäms av vilka två element som är tillsammans. Det ger $S(5, 4) = \binom{5}{2} = 10$. Det sökta antalet är alltså $4! \cdot 10 = 240$.

Svar: Det finns 240 olika sådana surjektioner.

b) (1p) Vi skall visa att det inte finns 11 parvis relativt prima tal i mängden $\{2, 3, 4, \dots, 30\}$.

Lösning:

Postfacksprincipen. Varje tal i mängden har ett av de 10 primtalen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 som minsta primfaktor. Av 11 tal måste då minst två ha en gemensam primfaktor, dvs inte vara relativt prima. **Saken är klar.**

c) (1p) Vi söker alla par av **konjugerade** permutationer bland $\pi, \rho, \sigma, \tau \in S_6$, givna på tvåradsform av $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,
 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning:

$\pi(1) = 4, \pi(4) = 1, \dots$ ger cykelformen $\pi = (1\ 4)(2\ 6\ 3)(5)$ och p.s.s. $\rho = (1\ 4\ 2\ 6\ 3)(5), \sigma = (1)(2\ 6\ 5\ 3\ 4), \tau = (1\ 6\ 2)(3\ 5)(4)$.

Permutationer är konjugerade om de har samma cykelstruktur, så

Svar: π och τ är konjugerade, liksom ρ och σ , men inga andra.

3) Vi söker (a, 1p) antalet heltal mellan 1 och 100000 som innehåller precis en 2:a och (b, 2p) antalet heltal mellan 1 och 100000 som innehåller precis en 2:a eller precis en 3:a (eller båda).

Lösning:

Vi betraktar talen 0–99999 i stället (inga 2, 3 i 0, 100000), dvs strängar av fem godtyckliga siffror. Antalet i a) är $5 \cdot 9^4$ (5: var står 2:an?, 9^4 : godtyckliga andra på övriga platser). Inklusion/exklusion i b). Om A, B är mängderna av dem med precis en 2:a respektive 3:a söker vi $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. $|A| = |B| = 5 \cdot 9^4$ och $|A \cap B| = 5 \cdot 4 \cdot 8^3$ (5: 2:an var?, 4: så 3:an var?, 8^3 : godtyckliga andra på övriga platser). Så $|A \cup B| = 2 \cdot 5 \cdot 9^4 - 5 \cdot 4 \cdot 8^3$.

Svar a: $5 \cdot 9^4 (= 32805)$ st, b: $10 \cdot 9^4 - 20 \cdot 8^3 (= 55370)$ st.

4) Vi har $\pi, \sigma \in S_6$ med (i cykelform) $\pi = (1\ 4\ 3)(2\ 6\ 5)$, medan σ ges av att $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 6, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 4, \sigma(5) = 5, \sigma(6) = 3$ och söker (a, 2p) σ^{-1} och $\pi\sigma$ i cykelnotation och (b, 1p) pariteten för $\pi^8\sigma^{-4}\pi^{17}\sigma^3\pi^{-13}$.

Lösning:

$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 6, \sigma(6) = 3, \dots$ ger i cykelform $\sigma = (1\ 2\ 6\ 3)(4)(5)$.

Cyklerna i σ^{-1} är omvända mot i σ , så i cykelform $\sigma^{-1} = (1\ 3\ 6\ 2)(4)(5)$.

$\pi\sigma = (1\ 4\ 3)(2\ 6\ 5)(1\ 2\ 6\ 3)(4)(5) = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$.

π är jämn (ingen cykel av jämn längd) och σ är udda (en cykel av jämn längd), så π^n jämn, σ^{-4} jämn och σ^3 udda. Produkten blir udda.

Svar a: $\sigma^{-1} = (1\ 3\ 6\ 2)(4)(5)$, $\pi\sigma = (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$, b: den är udda.

5) 20 barn ställs upp i ett led. Vi söker (a, 1p) antalet sätt de kan ordnas, (b, 1p) antalet sätt de kan ordnas då Lisa och Olle inte får stå jämte varandra och (c, 1p) antalet sätt då de två inte får ha precis ett barn mellan sig.

Lösning:

I a) handlar det om antalet permutationer av de 20 barnen, dvs $20!$ sätt.

I b) skall vi ta bort de ordningar då L och O står intill varandra, $2 \cdot 19!$ (2: vem av L och O först?, $19!$: ordna alla med L+O som ett jättebarn). (Eller, alla utom Olle kan ordnas på $19!$ sätt. Olle kan sedan placeras in på 18 sätt. $18 \cdot 19! = 20! - 2 \cdot 19!$.)

I c) skall man från $20!$ dra de ordningar där precis ett barn står mellan L och O, $2 \cdot 18 \cdot 18!$ (2: L eller O först?, 18: vem mellan dem?, $18!$: ordna alla med LO-klustret som ett barn). (Eller, övriga 18 kan ordnas på $18!$ sätt. Med L på en ytterplats (2 st) har O 19 platser. Med L på innerplats (17 st) har O 18 möjliga. $2 \cdot 18! \cdot 19 + 17 \cdot 18! \cdot 18 = 344 \cdot 18! = 20! - 2 \cdot 18 \cdot 18!$.)

Svar a: $20! (= 2432902008176640000)$ sätt,

b: $20! - 2 \cdot 19! = 18 \cdot 19! (= 2189611807358976000)$ sätt,

c: $20! - 2 \cdot 18 \cdot 18! = 344 \cdot 18! (= 2202416554770432000)$ sätt.
