Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks2, 25 februari 2013, i SF1662 Diskret matematik för CL1

		sant	falskt
1)	(För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p)		
a)	För fibonaccitalen F_n (se uppgift 5) gäller $F_{n+1} = F_{n-1} + 2F_{n-2}$ för $n = 2, 3, \dots$ [Nej, $2F_{n-1} + F_{n-2}$ skall det vara.]		X
b)	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ är sant för alla mängder A, B, C [Ja, ses t.ex. med venndiagram.]	X	
c)	Om A och B är mängder och $A \times B \subseteq B \times A$ gäller säkert att $A = B$. [Nej, endera kan vara $\varnothing$ också.]		X
d)	Både ekvivalensrelationer och partialordningar är säkert transitiva. [Ja, det ingår i definitionerna.]	X	
e)	Om $f : X \to Y$ är surjektiv och $g : Z \to Y$ är inverterbar är $g^{-1}f : X \to Z$ säkert surjektiv. [Ja, g^{-1} är inverterbar, så bijektiv, så surjektiv, så känd sats.]	X	
f)	Det existerar en injektion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. [Jadå, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{Z}$ är båda uppräkneliga, så det finns en bijektion, som ju är en injektion.]	X	

2a) (1p) Vi söker en funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ som är surjektiv, men inte bijektiv.

Lösning:
Ett exempel är $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$. $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{N}(\subset \mathbb{Z})$, så f är surjektiv, men $f(-1) = f(1) = 1$, så f är inte injektiv, alltså inte bijektiv.

Svar: Ett exempel ges av $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ (och ett annat av $\boldsymbol{f(x) = \max(x, 0)}$).

---

b) (1p) Vi skall finna mängder X, Y och funktioner $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, sådana att $(gf)(x) = x$ för alla $x \in X$ och g **inte** är en injektion.

Lösning:
Eftersom g inte är injektiv, kan vi låta $1 \in X$ och $a, b \in Y$ med $g(a) = g(b) = 1$. $f(1) = a$ ger då $(gf)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$, så om vi tar $X = \{1\}$ och $Y = \{a, b\}$ är saken klar.

Svar: T.ex. $\boldsymbol{X = \{1\}, Y = \{a, b\}, f(1) = a, g(a) = g(b) = 1}$.

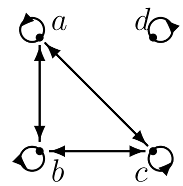
2c) (1p) $M = \{\varnothing, 3, 4\}$ och $N = \{M, \{\varnothing\}, 4\}$. Vi skall finna alla element i $M \cap N$ och avgöra om $\varnothing \subseteq M \cup N$, $\{\varnothing\} \subseteq M \cup N$ och $\{\{\varnothing\}\} \subseteq M \cup N$.

Lösning:
$M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ och } x \in N\}$, så $M \cap N = \{4\}$,
$\varnothing \subseteq X$ för alla mängder X, så $\varnothing \subseteq M \cup N$,
$\varnothing \in M \cup N$ (ty $\varnothing \in M$), så $\{\varnothing\} \subseteq M \cup N$ ($\varnothing$ är ju enda element i $\{\varnothing\}$),
$\{\varnothing\} \in M \cup N$ (ty $\{\varnothing\} \in N$), så $\{\{\varnothing\}\} \subseteq M \cup N$ ($\{\varnothing\}$ är ju enda element i $\{\{\varnothing\}\}$).

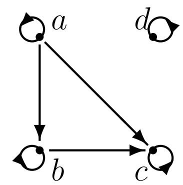
Svar: $\boldsymbol{M \cap N = \{4\}}$ och svaren på de andra frågorna är alla 'ja'.

3) $X = \{a, b, c, d\}$, $M = \{(a, b), (b, b), (b, c), (d, d)\}$ och $N = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b)\}$.
Vi söker (a, 2p) $N_a \subseteq N$, så att $M \cup N_a$ är en **ekvivalensrelation** på X och (b, 1p) $N_b \subseteq N$, så att $M \cup N_b$ är en **partialordning** på X.

Lösning:



a. Reflexivitet ger att $(a, a), (c, c) \in N_a$. Symmetri ger att $(b, a), (c, b) \in N_a$. Transitivitet ger $(a, c), (c, a) \in N_a$. Dessa räcker för att göra $M \cup N_a$ reflexiv, symmetrisk och transitiv, dvs till en ekvivalensrelation (och inget annat kan läggas till, med den givna N).



b. Reflexivitet ger att $(a, a), (c, c) \in N_b$. Transitivitet ger $(a, c) \in N_b$. Dessa räcker för att göra $M \cup N_b$ reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, dvs till en partialordning (och inget annat kan läggas till, med den givna N).

Svar a: $N_a = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, a), (c, b), (c, c)\}$,
b: $N_b = \{(a, a), (a, c), (c, c)\}$

---

4) (3p) Vi skall visa med naturlig deduktion att $\neg(A \wedge B) \vdash A \to \neg B$.
Givna härledningsregler: antagande, DN, $\wedge$E, $\wedge$I, $\to$E, $\to$I, $\neg$E, $\neg$I.

Lösning:

1	(1)	$\neg(A \wedge B)$	premiss	
2	(2)	A	antagande	
3	(3)	B	antagande	
2,3	(4)	$A \wedge B$	2,3	$\wedge$I
1,2,3	(5)	$\perp$	1,4	$\neg$E
1,2	(6)	$\neg B$	3,5	$\neg$I
1	(7)	$A \to \neg B$	2,6	$\to$I

Saken är klar, ty slutsatsen på rad 7 beror bara av premissen.

---

5) (3p) Fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras, som vanligt, av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Vi skall med induktion visa att $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Lösning:

Vi skall visa påståendet $P(n) : F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$ för $n \in \mathbb{N}$.
Bas: $\mathrm{VL}_0 = F_0 = 0$, $\mathrm{HL}_0 = F_2 - 1 = (F_0 + F_1) - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$, så $P(0)$ är sann.
Steg: Låt $k \in \mathbb{N}$ och antag $P(k)$, dvs att $F_0 + F_1 + \ldots + F_k = F_{k+2} - 1$.
Då är $\mathrm{VL}_{k+1} = F_0 + F_1 + \ldots + F_k + F_{k+1} = \mathrm{VL}_k + F_{k+1} \overset{\text{ind.ant.}}{=} \mathrm{HL}_k + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \overset{\text{def. av } F_i}{=} F_{k+3} - 1 = \mathrm{HL}_{k+1}$, dvs $P(k+1)$ blir sann och vi har visat att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$, **steget är klart**.
Induktionsprincipen ger nu att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar**.