

Matematik, KTH

B.Ek

Efternamn	förnamn	personnr

**Kontrollskrivning 2, må 25 februari 2013, 15.05–16.00,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd (3p) uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

poäng uppg.1

- a) För fibonaccitalen F_n (se uppgift 5) gäller $F_{n+1} = F_{n-1} + 2F_{n-2}$ för $n = 2, 3, \dots$
- b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ är sant för alla mängder A, B, C .
- c) Om A och B är mängder och $A \times B \subseteq B \times A$ gäller säkert att $A = B$.
- d) Både ekvivalensrelationer och partialordningar är säkert transitiva.
- e) Om $f : X \rightarrow Y$ är surjektiv och $g : Z \rightarrow Y$ är inverterbar är $g^{-1}f : X \rightarrow Z$ säkert surjektiv.
- f) Det existerar en injektion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$.

sant	falskt

Resultat på skrivningen:

Fylls i av rättaren

p 1	p 2	p 3	p 4	p 5	Σ p	G/U	bonus

SF1662 CL1, ks2 25.2-13

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange en funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ som är surjektiv, men inte bijektiv.
 $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{N}$ betecknar förstås heltalen och de naturliga talen.

b) (1p) Ge ett exempel på två mängder X, Y med funktioner $f : X \rightarrow Y$,
 $g : Y \rightarrow X$, sådana att $gf : X \rightarrow X$ uppfyller $(gf)(x) = x$ för alla $x \in X$ och
att g **inte** är en injektion.

c) (1p) Låt $M = \{\emptyset, 3, 4\}$ och $N = \{M, \{\emptyset\}, 4\}$.

Ange alla element i $M \cap N$ och avgör för var och en av följande om den gäller:
 $\emptyset \subseteq M \cup N$, $\{\emptyset\} \subseteq M \cup N$, $\{\{\emptyset\}\} \subseteq M \cup N$.

$M \cap N =$

$\emptyset \subseteq M \cup N?$

svar (ja/nej):

$\{\emptyset\} \subseteq M \cup N?$

svar (ja/nej):

$\{\{\emptyset\}\} \subseteq M \cup N?$

svar (ja/nej):

Namn	poäng uppg.3

3) Mängden X har fyra element, $X = \{a, b, c, d\}$.

Givna är följande delmängder av $X^2 = X \times X$:

$$M = \{(a, b), (b, b), (b, c), (d, d)\},$$

$$N = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, a), (c, b), (c, c), (d, a), (d, b)\}.$$

a) (2p) Finn $N_a \subseteq N$, så att $M \cup N_a$ definierar en **ekvivalensrelation** på X .

(Dvs så att $\mathcal{R}_a$ är en ekvivalensrelation, där $\mathcal{R}_a$ ges av att $x\mathcal{R}_ay$ omm $(x, y) \in M \cup N_a$.)

b) (1p) Finn $N_b \subseteq N$, så att $M \cup N_b$ definierar en **partialordning** på X .

(Dvs så att $\mathcal{R}_b$ är en partialordning, där $\mathcal{R}_b$ ges av att $x\mathcal{R}_by$ omm $(x, y) \in M \cup N_b$.)

Härledningsregler för naturlig deduktion

Regel för antagande

j (j) p antagande

Regel för $\wedge$ E:

$a_1, \dots, a_n$ (j) $p \wedge q$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n$ (k) p j $\wedge$ E
 (eller q)

Regel för $\rightarrow$ E:

$a_1, \dots, a_m$ (j) $p \rightarrow q$
 $\vdots$
 $b_1, \dots, b_n$ (k) p
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ (l) q j,k $\rightarrow$ E

Regel för $\neg$ E:

$a_1, \dots, a_m$ (j) $\neg p$
 $\vdots$
 $b_1, \dots, b_n$ (k) p
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ (l) $\perp$ j,k $\neg$ E

DN-regeln

$a_1, \dots, a_n$ (j) $\neg\neg p$
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n$ (k) p j DN

Regel för $\wedge$ I:

$a_1, \dots, a_m$ (j) p
 $\vdots$
 $b_1, \dots, b_n$ (k) q
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ (l) $p \wedge q$ j,k $\wedge$ I

Regel för $\rightarrow$ I:

j (j) p antagande
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n$ (k) q
 $\vdots$
 $\{a_1, \dots, a_n\}/j$ (l) $p \rightarrow q$ j,k $\rightarrow$ I

Regel för $\neg$ I:

j (j) p antagande
 $\vdots$
 $a_1, \dots, a_n$ (k) $\perp$
 $\vdots$
 $\{a_1, \dots, a_n\}/j$ (l) $\neg p$ j,k $\neg$ I

Namn	poäng uppg.4

4) (3p) Visa med naturlig deduktion att

$$\neg(A \wedge B) \vdash A \rightarrow \neg B.$$

Härledningsreglerna på motstående sida får användas.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) Låt $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ vara fibonaccitalen, som vanligt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & \text{för alla } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Visa med ett induktionsbevis att

$$F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1 \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots$$