Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks1, 4 februari 2013, i SF1610 Diskret matematik för CL1

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

	sant	falskt
a) $(325)_6 = (235)_7$. [Nej, $(325)_6 = 125$, $(235)_7 = 124$. Man ser utan beräkning att den första är udda och den andra jämn.]		×
b) Om $a \mid b$ och $b \mid c$, gäller säkert $a \mid c$. [Ja, $b = ma$ och $c = nb$ ger $c = nma$, så $a \mid c$.]	×	
c) Om $\text{sgd}(a, b) = \text{sgd}(b, c) = 1$ måste $\text{sgd}(a, c) = 1$ [Nej, $a = c = 2$, $b = 3$ ger motexempel, liksom $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$.]		×
d) Om $\text{sgd}(a, c) = \text{sgd}(b, d) = 1$ är säkert $\text{sgd}(ab, cd) = \text{sgd}(a, d) \cdot \text{sgd}(b, c)$. [Ja, ses med primfaktorisering av talen.]	×	
e) Om $\text{sgd}(a, m) = d$ har ekvationen $ax = b$ i $\mathbb{Z}_m$ säkert precis d lösningar. [Nej, det krävs också att $d \mid b$.]		×
f) Om p är ett primtal är p inverterbart i $\mathbb{Z}_m$ för alla $m > p$. [Nej, inte för t.ex. $m = 2p$. Då är ju $\text{sgd}(p, m) = p \neq 1$.]		×

2a) (1p) a, b, c, d, e är siffror (dvs bland 0, 1, 2, …, 9).
Vi söker ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att $99 \mid (abcde)_{10}$.

Lösning:

$100 \equiv_{99} 1$, så $(abcde)_{10} = a \cdot 100^2 + (10b + c) \cdot 100 + (10d + e) \equiv_{99}$
$\equiv_{99} a \cdot 1^2 + (10b + c) \cdot 1 + (10d + e) = a + 10b + c + 10d + e$, så:

Svar: $99 \mid (abcde)_{10}$ omm $99 \mid (a+10b+c+10d+e)$ $(= a+(bc)_{10}+(de)_{10})$.

---

b) (1p) Vi söker $(7 + 7^{-1})^{-1} + 7 \cdot 7$ i $\mathbb{Z}_{13}$.

Lösning:

Eftersom $7 \cdot 2 = 14 = 1 \cdot 13 + 1$, $(7 + 2) \cdot 3 = 27 = 2 \cdot 13 + 1$ är $7^{-1} = 2$, $(7+7^{-1})^{-1} = 3$ i $\mathbb{Z}_{13}$. Så $(7+7^{-1})^{-1} + 7 \cdot 7 = 3 + 49 = 52 = 4 \cdot 13 = 0$ i $\mathbb{Z}_{13}$.

Svar: $(7 + 7^{-1})^{-1} + 7 \cdot 7 = 0$ i $\mathbb{Z}_{13}$.

---

c) (1p) Vi söker additions- och multiplikationstabellerna för $\mathbb{Z}_4$.

Lösning:

Tabellerna blir som till höger.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

3) Vi söker (a, 1p) alla inverterbara element i $\mathbb{Z}_{18}$ och (b, 2p) inverserna till tre av dem.

Lösning:

a är inverterbart i $\mathbb{Z}_m$ omm $\text{sgd}(a, m) = 1$, så eftersom $18 = 2 \cdot 3^2$ är de inverterbara elementen precis de bland $0, 1, 2, \ldots, 17$ som inte är delbara med 2 eller 3. De är alltså 1, 5, 7, 11, 13, 17.
Eftersom $1^2 = (-1)^2 = 1$ är $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, dvs $17^{-1} = 17$. Om a är inverterbart är också a^{-1} inverterbart (och $(a^{-1})^{-1} = a$), så t.ex. 5^{-1} är en av 5, 7, 11, 13. Prövning ger $5 \cdot 5 = 25 = 7 \neq 1$, $5 \cdot 7 = 35 = 17 \neq 1$, $5 \cdot 11 = 55 = 3 \cdot 18 + 1 = 1$, så $5^{-1} = 11$.

Svar a: De inverterbara elementen är 1, 5, 7, 11, 13, 17,
b: $\mathbf{1^{-1} = 1,\ 5^{-1} = 11,\ 17^{-1} = 17}$ (och $\mathbf{7^{-1} = 13,\ 11^{-1} = 5,\ 13^{-1} = 7}$).

---

4) Vi söker (a, 2p) $\text{sgd}(2397, 2635)$ och (b, 1p) $\text{mgm}(2397, 2635)$.

Lösning:

Vi använder Euklides algoritm:
$2635 = 1 \cdot 2397 + 238, \quad 2397 = 10 \cdot 238 + 17, \quad 238 = 14 \cdot 17 + 0,$
så $\text{sgd}(2397, 2635) = 17$ och $\text{mgm}(2397, 2635) = \frac{2397 \cdot 2635}{\text{sgd}(2397,2635)} = \frac{2397 \cdot 2635}{17}$.

Svar a: $\mathbf{sgd(2397, 2635) = 17}$,
b: $\mathbf{mgm(2397, 2635) = \frac{2397 \cdot 2635}{17}}$ (= 371535).

---

5) (3p) Givet är att $\text{sgd}(4485, 1612) = 13 = -23 \cdot 4485 + 64 \cdot 1612$ och vi söker alla heltalslösningar x, y till ekvationen $4485x - 1612y = 78$.

Lösning:

Eftersom $78 = 6 \cdot 13$ får man $78 = -(23 \cdot 6) \cdot 4485 + (6 \cdot 64) \cdot 1612 = 4485 \cdot (-138) - 1612 \cdot (-384)$, så en lösning är $x_0 = -138$, $y_0 = -384$.
Om x, y är en lösning gäller $0 = 78 - 78 = 4485x - 1612y - (4485x_0 - 1612y_0) = 4485(x - x_0) - 1612(y - y_0)$, så $4485(x - x_0) = 1612(y - y_0)$.
Division med sgd:n 13 ger $345(x - x_0) = 124(y - y_0)$. Eftersom $\text{sgd}(345, 124) = 1$ måste $124 \mid (x - x_0)$, dvs $x = x_0 + 124k$ för något heltal k och insättning ger att $y = y_0 + 345k$. Å andra sidan ger detta lösningar för alla heltal k, så alla lösningar ges av $x = -138 + 124k$, $y = -384 + 345k$. $n = k - 2$ ger en lite nättare form på svaret.

Svar: Alla lösningar är $\begin{cases} \mathbf{x = 110 + 124n} \\ \mathbf{y = 306 + 345n,} \end{cases}$ $\boldsymbol{n}$ ett godtyckligt heltal.
