

**Svar och lösningsförslag till ks5, 21 maj 2012,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om grafen $G = (V, E)$ har ett jämnt antal komponenter och $ V - 1$ av hörnen har udda valens (grad), måste alla hörnen ha udda valens. [Nejdå. Motex: $\bullet - \bullet \bullet$.]		×
b) En sammanhängande graf med precis två hörn (noder) med udda valens (grad) har säkert en eulerkrets. [Nej. Den har en eulerväg, men ingen eulerkrets.]		×
c) Om en graf $G = (V, E)$ är sammanhängande och innehåller precis en cykel måste $ V = E $. [Ja, om en kant i cykeln tas bort återstår ett träd, med $ E' = V - 1$.]	×	
d) Om $G = (V, E)$ är en sammanhängande plan graf har den duala grafen $G^\perp$ säkert precis $ V $ ytor (fasetter). [Ja. Precis ett av G 's hörn i var och en av $G^\perp$'s ytor.]	×	
e) Det kromatiska talet $\chi(G)$ för en graf G är lika med det största av de kromatiska talen för G 's komponenter. [Ja, så många färger räcker för alla komponenter, men inte färre.]	×	
f) Alla grafer med samma kromatiska polynom är isomorfa. [Nej, tyvärr. Motexempel: olika träd med samma antal hörn.]		×

2a) (1p) Vi skall ange definitionen av att de båda graferna $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är **isomorfa**.

Lösning:

$G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är isomorfa omm det finns en **bijektion** $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ sådan att $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$.

b) (1p) Vi skall avgöra om grafen med
granntabellen t.h. kan vara ett binärt rotat
träd och i så fall finna en möjlig rot.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
c	f	a	a	a	b	e	b	e	b
d	h	h		g			c		
e	j			i					

Lösning:

Grafen ses vara sammanhängande och utan cykler, så ett träd. Alla valenser ≤ 3 , så ett binärt rotat träd om ett hörn med valens 1 eller 2 tas som rot.

Svar: Ja, ett binärt rotat träd, om roten är en av c, d, f, g, h, i, j.

c) (1p) Vi skall ange två grafer så att G är icke-planär omm minst en av dem "ingår" i G .

Lösning:

Enligt Kuratowskis och Wagners satser är en graf planär omm den inte "innehåller" någon av K_5 , den fullständiga grafen med 5 hörn, och $K_{3,3}$, den fullständiga bipartita grafen med 3, 3 hörn.

Svar: De två graferna är K_5 och $K_{3,3}$.

3) Vi skall avgöra för vilka $m, n \in \mathbb{Z}_+$ $K_{m,n}$ är hamiltonsk.

Lösning:

I cykeln måste hörnen komma vartannat av varje typ, så det måste gälla att $m = n$. $K_{1,1}$ innehåller ingen cykel, men om $m = n > 1$ är $x_1y_1x_2y_2x_3 \dots x_ny_nx_1$ en hamiltoncykel (den besöker ju varje hörn precis en gång).

Svar: $K_{m,n}$ är hamiltonsk omm $m = n \in \mathbb{Z}_+$ med $n > 1$.

4) Den sammanhängande $G = (V, E)$, med $|E| = 22$, ritas på ytan av en sfär, som delas in i 12 områden av kanterna i E . Vi söker antalet hörn, $|V|$, om (a, 2p) inga kanter korsas och (b, 1p) om det finns ett ställe där två kanter korsas.

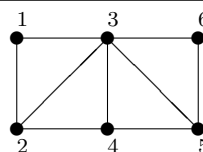
Lösning:

Om inga kanter korsas gäller med vanliga beteckningar att $v - e + r = 2$ (Eulers polyederformel), så i a) får vi $v = 2 + e - r = 12$.

I b), om vi tar bort en av de korsande kanterna får vi en plan graf med nya e, r, c . Om den nya grafen är sammanhängande är de nya värdena $e = 21, r = 10, c = 1$ och om den blev osammanhängande är de $e = 21, r = 11, c = 2$ (ena delen av den borttagna kanten har samma yta på båda sidor. Där ökar inte antalet.). I båda fallen blir $v = 1 + e - r + c = 13$.

Svar a: Antalet hörn fås till 12, **b:** Egentligen var antalet 13.

5) För grafen G i figuren skall vi bestämma (a, 2p) det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ och (b, 1p) antalet sätt att färga grafen med exakt fyra färger.



Lösning:

Hörn 1 kan färgas på λ sätt och för vart och ett av dem kan hörn 2 färgas på $\lambda - 1$ sätt, sedan återstående hörn i ordning på $\lambda - 2$ sätt var. Multiplikationsprincipen ger totalt $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^4$.

Antalet sätt att färga G med exakt fyra färger är $P_G(4)$ —antalet sätt att färga den med färre färger bland de fyra. Eftersom den inte kan färgas med två eller färre färger och det finns 4 sätt att välja ut tre färger att använda blir det $P_G(4) - 4 \cdot P_G(3) = 4 \cdot 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^4 = 168$. ("Kort" inklusion och exklusion.)

Svar a: $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^4$, **b:** På 168 sätt.