

**Svar och lösningsförslag till ks3, 23 april 2012,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Sannolikheten är likformigt fördelad om och endast om $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ för alla händelser A, B . [Nej, sambandet gäller precis om A, B är disjunkta, något helt annat.]		×
b) I utvecklingen av $(x + 2y + 3z)^{12}$ ingår en term $\frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot 12!}{6! \cdot 3! \cdot 4!} \cdot x^6 y^3 z^4$. [Nej, ingen term med $x^6 y^3 z^4$ (ty $6 + 3 + 4 \neq 12$).]		×
c) Det finns precis 150 olika surjektioner $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c\}$. [Ja, de är $3! \cdot S(5, 3) = 6 \cdot 25 = 150$ st.]	×	
d) För alla $n, k \in \mathbb{Z}_+$ gäller $\binom{k+n-1}{k} \leq n^k$. [Ja, de räknar båda urval med upprepning av k från en n -mängd, men bara den andra räknar omkastningar som olika.]	×	
e) För alla $\pi \in S_n$ (mängden av permutationer av $\{1, 2, \dots, n\}$) gäller att π och π^{-1} är konjugerade permutationer. [Ja, de har samma cykelstruktur och är därmed konjugerade.]	×	
f) Antalet jämna permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ är 240. [Nej. Det är $\frac{1}{2} \cdot 6! = 360$.]		×

2a) (1p) Hur många **strängt växande** funktioner $f : \{1, \dots, 20\} \rightarrow \{1, \dots, 51\}$ finns det? f är strängt växande precis om $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ för alla x, y .

Lösning:

Eftersom f är injektiv ($x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$) har dess värdemängd precis 20 element. Varje 20-delmängd till $\{1, 2, \dots, 51\}$ är också värdemängd för precis en strängt växande funktion ($f(1) = \text{det minsta talet}, f(2) = \text{nästa, etc.}$). Det sökta antalet är alltså lika med antalet 20-delmängder till en 51-mängd, dvs $\binom{51}{20} = \frac{51!}{20! \cdot (51-20)!}$.

Svar: Antalet sådana funktioner är $\frac{51!}{20! \cdot 31!} (= 77535155627160)$.

b) (1p) Vi skall visa att om $(\pi_1, \sigma_1), (\pi_2, \sigma_2), \dots, (\pi_5, \sigma_5) \in S_{100} \times S_{100}$ finns säkert i, j med $1 \leq i < j \leq 5$ så att både $\pi_i \pi_j$ och $\sigma_i \sigma_j$ är jämna permutationer.

Lösning:

Postfacksprincipen. Bland 5 finns säkert 2 som har samma pariteter för π :na och σ :na (bara 4 kombinationer, jj, ju, uj, uu möjliga). Om $\text{sgn } \pi_i = \text{sgn } \pi_j$ är $\pi_i \pi_j$ jämn och samma för σ_i, σ_j . **Saken är klar.**

c) (1p) $\pi \in S_{12}$ ges av $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 4 & 11 & 2 & 6 & 1 & 3 & 12 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Vi skall avgöra om π är en jämn eller en udda permutation.

Lösning:

$\pi(1) = 9, \pi(9) = 12, \dots$ så på cykelform: $\pi = (1\ 9\ 12\ 7)(2\ 10\ 5)(3\ 4\ 11\ 8)(6)$.

Ett jämnt antal cykler av jämn längd, så π är jämn (alt. $12 - c(\pi) = 8$, jämnt).

Svar: π är en jämn permutation.

3) Bland de 37 deltagarna i diskretmattefestivalen delas först 5 olika priser ut till olika personer och sedan fördelas 63 röster bland övriga 32 deltagare. Vi skall bestämma antalet olika möjliga resultat.

Lösning:

De fem priserna kan fördelas på $(37)_5 = \frac{37!}{(37-5)!} = \frac{37!}{32!}$ sätt (injektioner från en 5-mängd till en 37-mängd).

De 63 rösterna kan fördelas bland övriga 32 deltagare på $\binom{63+31}{31} = \frac{94!}{31! \cdot 63!}$ sätt (oordnat urval med upprepning, 31 väggar bland $63 + 31$ positioner).

Enligt multiplikationsprincipen är antalet resultat produkten av ovanstående.

Svar: Antalet är $\frac{37! \cdot 94!}{32! \cdot 31! \cdot 63!}$ (= 348884958289236772057707158346240).

4) Vi har $\pi, \sigma \in S_5$ med (i cykelform) $\pi = (1\ 3)(2\ 4)(5)$, medan σ ges av att $\sigma(1)=5, \sigma(2)=1, \sigma(3)=4, \sigma(4)=3, \sigma(5)=2$ och söker (a, 2p) σ^{-1} och $\pi\sigma^{-1}$ i cykelnotation och (b, 1p) ordningen för permutationen $\pi\sigma^{-1}$.

Lösning:

$\sigma(1)=5, \sigma(5)=2, \sigma(2)=1, \sigma(3)=4, \sigma(4)=3$, så i cykelform $\sigma = (1\ 5\ 2)(3\ 4)$.

Cyklerna i σ^{-1} är omvända mot i σ , så i cykelform $\sigma^{-1} = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$.

$\pi\sigma^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)(5)(1\ 2\ 5)(3\ 4) = (1\ 4)(2\ 5\ 3)$.

Ordningen $o(\pi\sigma^{-1}) = 2 \cdot 3 = 6$ (minsta gemensamma multipeln av cykel-längderna).

Svar a: $\sigma^{-1} = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$, $\pi\sigma^{-1} = (1\ 4)(2\ 5\ 3)$,

b: $\pi\sigma^{-1}$ har ordning 6.

5) (3p) Leonhard har totalt 140 böcker i sin bokhylla. 79 är på svenska, 83 är pocketböcker och 102 handlar om matematik. Av pocketböckerna är 50 på svenska och 73 om matematik. 16 av dem är varken pocket, på svenska eller om matematik. Vi söker antalet inbundna böcker på svenska om matematik Leonhard har i sin bokhylla.

Lösning:

Låt X vara mängden av böcker i hyllan, S de på svenska, P pocketböckerna och M de om matte.

Vi vet att $|X \setminus (S \cup P \cup M)| = 16$, $|S| = 79$, $|P| = 83$, $|M| = 102$, $|S \cap P| = 50$, $|P \cap M| = 73$ och söker $|S \cap P^c \cap M| = |S \cap M| - |S \cap P \cap M|$.

Principen om inklusion och exklusion ger $124 = |X| - 16 = |S| + |P| + |M| - |S \cap P| - |S \cap M| - |P \cap M| + |S \cap P \cap M| = 79 + 83 + 102 - 50 - |S \cap M| - 73 + |S \cap P \cap M| = 141 - (|S \cap M| - |S \cap P \cap M|)$. $141 - 124 = 17$, så

Svar: Han har (i hyllan) 17 inbundna svenska matematikböcker.
