

**Svar och lösningsförslag till ks2, 5 mars 2012,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) $a_0 = 2$ och $a_{n+1} = 3a_n + (a_{n-1})^2$ för $n = 1, 2, \dots$ definierar tillsammans a_n entydigt för alla $n = 0, 1, 2, \dots$ [Nej, a_1 kan fortfarande väljas godtyckligt.]		×
b) Ett (reellt) primtal som är $4k+3$ för något $k \in \mathbb{N}$ är ett irreducibelt element i $\mathbb{Z}[i]$, de gaussiska heltalen. [Ja, en irreducibel faktor g måste ha $ g ^2 \mid p^2$ och $ g ^2 \neq p$.]	×	
c) För alla mängder A, B gäller att $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = ((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))^c$. [Ja, ses enkelt med venndiagram.]	×	
d) Om en binär relation är reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv är den säkert en ekvivalensrelation. [Nej, men den är en partialordning (symmetrisk skulle det vara).]		×
e) Om $f: X \rightarrow Y$ och $g: Y \rightarrow Z$ båda är inverterbara är sammansättningen $gf: X \rightarrow Z$ säkert inverterbar. [Javisst, inverterbar är ju detsamma som bijektiv, så känd sats.]	×	
f) De gaussiska rationella talen $\mathbb{Q}[i] = \{p + qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ är en överuppräknelig mängd. [Nejdå, $ \mathbb{Q} = \mathbb{N} $ så $ \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N} $.]		×

2a) (1p) Vi söker $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ som är injektiv men inte surjektiv.

Lösning:

Ett enkelt exempel är $f(x) = 2x$. $2x_1 = 2x_2$ ger $x_1 = x_2$, så f är injektiv, men det finns inget $x \in \mathbb{Z}$ så att $f(x) = 1 (\in \mathbb{Z})$, så f är inte surjektiv.

Svar: Ett exempel ges av $f(x) = 2x$.

b) (1p) Vi skall faktorisera det gaussiska heltalet $3 - i$ i irreducibla element (gaussiska primtal).

Lösning:

$|3 - i|^2 = 3^2 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10 = 2 \cdot 5$, så $1 + i$ ingår som en faktor och dessutom en faktor som är antingen $2 + i$ eller $2 - i$ (ty 5 är ett primtal $\equiv_4 1$).

Man finner $\frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i (= (-i)(2+i))$, så $3 - i = (1 + i)(1 - 2i)$ och $1 + i$ och $1 - 2i$ är irreducibla (ty $|1 + i|^2, |1 - 2i|^2$ är reella primtal).

Svar: En sådan faktorisering är $3 - i = (1 + i)(1 - 2i)$.

c) (1p) $A = \{0, 1\}$ och vi söker alla $B \in \mathcal{P}(A \cup \{A\})$ så att $0 \in B$.

Lösning:

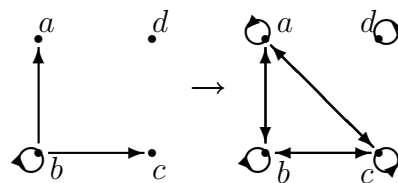
$A \cup \{A\} = \{0, 1, A\}$, så de sökta B är $\{0\}, \{0, 1\} (= A), \{0, A\}, \{0, 1, A\} (= A \cup \{A\})$.

Svar: De sökta delmängderna är $\{0\}, \{0, 1\}, \{0, A\}, \{0, 1, A\}$.

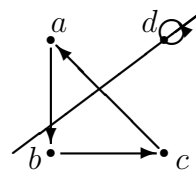
3) Vi skall, om det är möjligt, genom att lägga till minimalt antal pilar göra så att relationerna får önskade egenskaper.

Lösning:

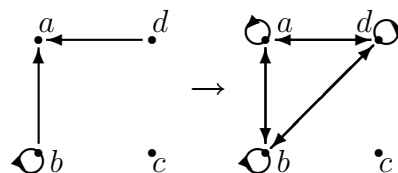
a) (1p) Relationen blir en ekvivalensrelation (reflexiv, symmetrisk, transitiv) enligt figuren.



b) (1p) Relationen kan **inte** byggas på till en partialordning, ty transitiviteten skulle ge pilar åt båda hållen mellan b och c , så $b = c$. Svaret är alltså att det är **omöjligt**.



c) (1p) Relationen blir symmetrisk och transitiv men inte reflexiv enligt figuren. (Öglorna vid a och d krävs för transitiviteten.)



Svar a,c: Enligt figurerna, b: Omöjlig.

4) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ges av att $f(x) = \frac{x}{2}$ då x är jämnt och $= 2x$ då x är udda. Vi skall (a, 2p) avgöra om f är en injektion, en surjektion och/eller en bijektion och (b, 1p) finna sammansättningen $f \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Lösning:

För ett godtyckligt $y \in \mathbb{Z}$ är $f(2y) = \frac{2y}{2} = y$ ($2y$ är ju jämnt), så f är en surjektion. $f(4) = \frac{4}{2} = 2 = 2 \cdot 1 = f(1)$, så f är inte en injektion. Eftersom en bijektion alltid är en injektion, är f inte heller en bijektion.

Om $4 \mid x$ är $\frac{x}{2}$ jämnt, så $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{4}$.

Om x är jämnt men $\frac{x}{2}$ udda, är $f(f(x)) = f(\frac{x}{2}) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$.

Om x är udda är $f(f(x)) = f(2x) = \frac{2x}{2} = x$.

Svar a: f surjektiv, men varken injektiv eller bijektiv,

b: $f(x) = \frac{x}{4}$ då $4 \mid x$ och $f(x) = x$ annars.

5) (3p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, \dots$ definieras rekursivt enligt $a_0 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

Vi skall med induktion visa att $a_n = 2^{n+3} - 3$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Bas: $VL_0 = a_0 = 5$, $HL_0 = 2^{0+3} - 3 = 8 - 3 = 5$. Det stämmer för $n = 0$.

Steg: Antag att påståendet stämmer för $n = k$, dvs att $a_k = 2^{k+3} - 3$.

Då fås $VL_{k+1} = a_{k+1} \stackrel{\text{rek.}}{=} 2a_k + 3 \stackrel{\text{ant.}}{=} 2(2^{k+3} - 3) + 3 = 2^{k+4} - 6 + 3 = 2^{(k+1)+3} - 3 = HL_{k+1}$.

Om påståendet kallas $P(n)$ har vi visat $P(0)$ och $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ för $k \in \mathbb{N}$. Induktionsprincipen ger att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar**.