

Matematik, KTH

B.Ek

Efternamn	förnamn	pnr	program

**Kontrollskrivning 2, må 5 mars 2012, 9.00–10.00,
i SF1662 Diskret matematik för CL1**

Inga hjälpmedel tillåtna.

Minst 8 poäng ger godkänt.

Godkänd ks n medför godkänd (3p) uppgift n vid tentor till (men inte med) nästa ordinarie tenta (högst ett år), $n = 1, \dots, 5$.

13–15 poäng ger ett ytterligare bonuspoäng vid samma tentor.

Uppgifterna 3)–5) kräver väl motiverade lösningar för full poäng.

Uppgifterna står inte säkert i svårighetsordning.

Spara alltid återlämnade skrivningar till slutet av kursen!

Skriv dina lösningar och svar på samma blad som uppgifterna, använd baksidan om det behövs.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

Kryssa för om påståendena **a)–f)** är sanna eller falska (eller avstå!)

poäng uppg.1

- a) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + (a_{n-1})^2$ för $n = 1, 2, \dots$ definierar tillsammans a_n entydigt för alla $n = 0, 1, 2, \dots$
- b) Ett (reellt) primtal som är $4k + 3$ för något $k \in \mathbb{N}$ är ett irreducibelt element i $\mathbb{Z}[i]$, de gaussiska heltalen.
- c) För alla mängder A , B gäller att $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = ((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))^c$.
- d) Om en binär relation är reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv är den säkert en ekvivalensrelation.
- e) Om $f : X \rightarrow Y$ och $g : Y \rightarrow Z$ båda är inverterbara är sammansättningen $gf : X \rightarrow Z$ säkert inverterbar.
- f) De **gaussiska rationella talen** $\mathbb{Q}[i] = \{p + qi \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ är en överuppräknelig mängd.

sant	falskt

Resultat på skrivningen:

Fylls i av rättaren

p 1	p 2	p 3	p 4	p 5	Σ p	G/U	bonus

SF1662 CL1, ks2 5.3-12

Namn	poäng uppg.2

2a) (1p) Ange en funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ som är injektiv, men inte surjektiv. $\mathbb{Z}$ betecknar förstås heltalen.

b) (1p) Faktorisera det gaussiska heltalet

$$3 - i$$

i irreducibla element (gaussiska primtal).

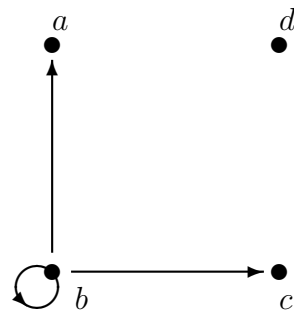
c) (1p) Låt $A = \{0, 1\}$ och (som vanligt) $\mathcal{P}(A \cup \{A\})$ vara mängden av delmängder till $A \cup \{A\}$.

Ange alla $B \in \mathcal{P}(A \cup \{A\})$ så att $0 \in B$.

Namn	poäng uppg.3

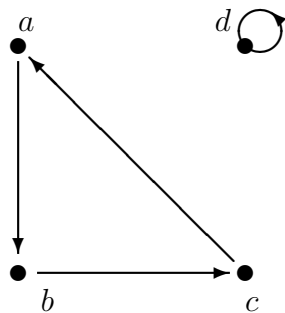
3) Figurerna nedan visar (grafer för) tre relationer. Lägg i var och en av dem till **så få pilar som möjligt** så att den uppkomna grafen beskriver en relation av den angivna typen, **eller** förklara varför detta inte är möjligt.

a) (1p) Gör denna relation till en **ekvivalensrelation**.



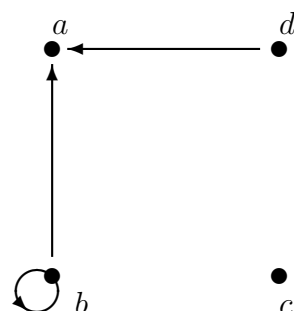
☐ Omöjligt, ty:

b) (1p) Gör denna relation till en **partialordning** (så som det definieras i boken, dvs så att varje element står i relationen till sig själv).



☐ Omöjligt, ty:

c) (1p) Gör denna relation **symmetrisk och transitiv**, men **inte reflexiv**.



☐ Omöjligt, ty:

Namn	poäng uppg.4

4) Låt funktionen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{då } x \text{ är ett jämnt tal} \\ 2x & \text{då } x \text{ är ett udda tal.} \end{cases}$$

a) (2p) Avgör om f är en injektion, en surjektion och/eller en bijektion. Glöm inte att motivera svaren.

f är:

f är inte:

b) (1p) Finn sammansättningen ff av f med sig själv, dvs $ff = f \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Namn	poäng uppg.5

5) (3p) En talföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = a_0, a_1, a_2, \dots$ definieras rekursivt av

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Visa med ett induktionsbevis att

$$a_n = 2^{n+3} - 3$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan efter skrivningen.