Matematik, KTH

## Svar och lösningsförslag till ks1, 9 februari 2012, i SF1610 Diskret matematik för CL1

**1)** (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

| | | sant | falskt |
|---|---|---|---|
| **a)** | Om $(abc)_6$ är talet som skrivs $abc$ i bas 6, gäller $8 \mid (abc)_6$ om och endast om $8 \mid (4a+2b+c)$. [Nej, T.ex. $8 \nmid (112)_6 = 44$, men $8 \mid (4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2) = 8$. $4a - 2b + c$ bör det vara.] | | × |
| **b)** | $\text{sgd}(63000001, 21007) = 1$. [Ja, $\text{sgd}(63000001, 21007) = \text{sgd}(63000001 - 3000 \cdot 21007, 21007) = \text{sgd}(1 - 3000 \cdot 7, 21007) = \text{sgd}(1 - 21000, 21007) = \text{sgd}(1 - 21000, 8) = \text{sgd}(1, 8) = 1$.] | × | |
| **c)** | Om $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ är primtal så att $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4$, måste $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$. [Nej, $p_1 = p_4$, $p_2 = p_3$ är också möjligt.] | | × |
| **d)** | Om $k$ är en delare till heltalen $m$, $n$, är $k$ säkert en delare till $\text{sgd}(m,n)$ och $\text{mgm}(m,n)$. [Ja, $k \mid \text{sgd}(m,n)$ enligt definitionen av sgd, $k \mid m$, $m \mid \text{mgm}(m,n)$ ger $k \mid \text{mgm}(m,n)$.] | × | |
| **e)** | Om $a = b^{-1}$ i $\mathbb{Z}_m$ är säkert $b = a^{-1}$ (i $\mathbb{Z}_m$, förstås). [Ja, $a = b^{-1} \Leftrightarrow ba = 1 \Leftrightarrow ab = 1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$.] | × | |
| **f)** | Om ekvationen $ax = b$ är lösbar i $\mathbb{Z}_m$ är ekvationen $mx = b$ säkert lösbar i $\mathbb{Z}_a$. [Ja, de gäller omm $\text{sgd}(a,m) \mid b$ respektive $\text{sgd}(m,a) \mid b$.] | × | |

---

**2a)** (1p) Uttryck talet 262 (dvs $(262)_{10}$) i bas 3.

**Lösning:**

Succesiv division ger $262 = 87 \cdot 3 + 1$, $87 = 29 \cdot 3 + 0$, $29 = 9 \cdot 3 + 2$, $9 = 3 \cdot 3 + 0$, $3 = 1 \cdot 3 + 0$, $1 = 0 \cdot 3 + 1$, så (läs resterna bakifrån) $262 = (100201)_3$. (Eller se på annat sätt att $262 = 1 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^2 + 1 = 242 + 18 + 1$.)

**Svar: $262 = (100201)_3$.**

---

**b)** (1p) Vi söker $2^{-1} + 3 \cdot 8^{-1}$ i $\mathbb{Z}_9$.

**Lösning:**

Eftersom $2 \cdot 5 = 10 = 1 \cdot 9 + 1$, $8 \cdot 8 = 7 \cdot 9 + 1$ är $2^{-1} = 5$, $8^{-1} = 8$ i $\mathbb{Z}_9$. Så $2^{-1} + 3 \cdot 8^{-1} = 5 + 3 \cdot 8 = 29 = 2$ i $\mathbb{Z}_9$.

**Svar: $2^{-1} + 3 \cdot 8^{-1} = 2$ i $\mathbb{Z}_9$.**

---

**c)** (1p) Vi skall avgöra vilka av 1, 3, 10, 21, 25, 39, 68, 100, 121, 140 som är inverterbara i $\mathbb{Z}_{147}$.

**Lösning:**

$r$ i $\mathbb{Z}_m$ är inverterbart precis om $\text{sgd}(r, m) = 1$. Eftersom $147 = 3 \cdot 7^2$ är $a$ i $\mathbb{Z}_{147}$ inverterbart omm $3 \nmid a$ och $7 \nmid a$. Så 1, 10, 25, 68, 100, 121 är inverterbara, 3, 21, 39, 140 är det inte.

**Svar: Inverterbara: 1, 10, 25, 68, 100, 121.**
**Inte inverterbara: 3, 21, 39, 140.**

**3)** I Lisas låda finns vikter av typ A, som väger 3 kg styck, och av typ B, som väger 5 kg styck. Totalt väger de 32 kg.
Vi söker alla möjligheter för antalen av de olika vikterna.

---

**Lösning:**

Vi kallar antalet vikter av typ A för $x$ och antalet av typ B för $y$.
Problemet blir att finna för vilka heltaliga $x$, $y \geq 0$ som $3x + 5y = 32$.
Man ser (direkt eller med Euklides algoritm) att $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$, så $3 \cdot 64 + 5 \cdot (-32) = 32$ och $x_0 = 64$, $y_0 = -32$ är en lösning till ekvationen.
Om $x$, $y$ är en lösning fås $3x + 5y = 3x_0 + 5y_0$, dvs $3(x - x_0) = -5(y - y_0)$, så $5 \mid (x - x_0)$, dvs $x = x_0 + 5k$ för något heltal $k$. Ekvationen ger $y = y_0 - 3k$.
Dessa är också lösningar för alla heltal $k$.
Villkoret att $x$, $y \geq 0$ ger $k \geq -\frac{64}{5} = -12\frac{4}{5}$ respektive $k \leq -\frac{32}{3} = -10\frac{2}{3}$. Enda möjliga $k$ är alltså $-11$, $-12$ som ger $x = 9$, $y = 1$ och $x = 4$, $y = 4$.

**Svar: Enda möjligheterna är 9 typ A, 1 typ B och 4 av varje typ.**

---

**4)** Vi söker (a, 1p) multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_5$ och (b, 2p) $a^{1066}$ för alla $a$ i $\mathbb{Z}_5$.

| × | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **2** | **0** | **2** | **4** | **1** | **3** |
| **3** | **0** | **3** | **1** | **4** | **2** |
| **4** | **0** | **4** | **3** | **2** | **1** |

---

**Lösning:**

Tabellen blir som till höger.
$0^n = 0$, $1^n = 1$ för alla $n = 1, 2, \ldots$ och enligt tabellen är $2^2 = 3^2 = 4$, $2^4 = 3^4 = 4^2 = 1$,
så $2^{1066} = 2^{4 \cdot 258 + 2} = 1^{258} \cdot 2^2 = 4$, $3^{1066} = 3^{4 \cdot 258 + 2} = 1^{258} \cdot 3^2 = 4$
$4^{1066} = 4^{2 \cdot 533} = 1^{533} = 1$.

**Svar a: Tabellen enligt ovan,**
**b: $\mathbf{0^{1066} = 0}$, $\mathbf{1^{1066} = 4^{1066} = 1}$, $\mathbf{2^{1066} = 3^{1066} = 4}$.**

---

**5)** Vi söker (a, 1p) antalet $x$ bland $1, 2, \ldots, 99$ som uppfyller $39x + 7 \equiv 43 \pmod{99}$ och (b, 2p) alla dessa $x$.

---

**Lösning:**

Villkoret är ekvivalent med $39x \equiv_{99} 36$, så det finns sådana $x$ precis om $\text{sgd}(39, 99) \mid 36$, dvs $3 \mid 36$, så de finns. Deras antal i $\mathbb{Z}_{99}$ är $\text{sgd}(39, 99) = 3$, som också är antalet bland de givna talen.
För att finna lösningarna noterar vi att kongruensen är ekvivalent med $13x \equiv_{33} 12$ (ty $99 \mid (39x - 36) \Leftrightarrow 33 \mid (13x - 12)$). (Man kunde också finna alla lösningar som i uppgift 3 ovan.) Vi använder först Euklides algoritm.

$33 = 2 \cdot 13 + 7$ och $1 = 7 - 6 = 7 - (13 - 7) =$
$13 = 1 \cdot 7 + 6$ $\quad = -13 + 2 \cdot 7 = -13 + 2(33 - 2 \cdot 13) =$
$7 = 1 \cdot 6 + 1$ $\quad = 2 \cdot 33 - 5 \cdot 13$,

så $13^{-1}$ i $\mathbb{Z}_{33}$ är $-5 (= 33 - 5 = 28)$. $x = 13^{-1} \cdot 12 = -5 \cdot 12 = -60 = 6$ i $\mathbb{Z}_{33}$.
Alla heltaliga $x$ som uppfyller villkoret är alltså $6 + 33k$, $k$ godtyckligt heltal.
Av dessa ligger 6, 39, 72 bland de givna.

**Svar a: det finns 3 stycken sådana $x$, b: de är 6, 39 och 72.**

---