

KTH Matematik

B.Ek

Svar och lösningsförslag till ks5, 18 maj 2011, i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om graferna G_1 och G_2 är isomorfa med delgrafer till G_2 respektive G_3 är G_1 isomorf med en delgraf till G_3 . [Ja. Grannbevarande injektioner har sammansättning av samma typ.]	×	
b) Om en graf G innehåller en cykel av udda längd är G inte bipartit. [Ja. Ett udda antal steg i en bipartit graf leder inte tillbaks.]	×	
c) Om grafen (V, E) är hamiltonsk finns $E' \subseteq E$ så att (V, E') är en cyklisk graf (dvs isomorf med C_n , $n = V $). [Ja. Hamiltoncykeln innehåller alla hörnen i V .]	×	
d) De enda platoniska kropparna (regelbundna polyedern) som har planära grafer är tetraedern, oktaedern och kuberna. [Nej. De är alla planära.]		×
e) Om grafen G 's kromatiska polynom $P_G(\lambda)$ (för ett naturligt tal n) har $P_G(n) \neq 0$ är $P_G(k) \neq 0$ för $k = n+1, n+2, \dots$. [Ja. Om G kan färgas med högst n färger kan den färgas med högst k .]	×	
f) I varje bipartit graf $(X \cup Y, E)$ ($X \cap Y = \emptyset$) med $ X = Y $ som också är ett träd finns en fullständig matchning. [Nej. Motexempel t.ex.  .		×

2a) (1p) Är graferna G_1 och G_2 med **grannmatriser** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ isomorfa?

Lösning:

Nej. G_2 har ett hörn med valens 1 (rad 3 i matrisen), men det har inte G_1 .

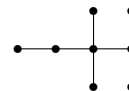
Svar: Nej, de är inte isomorfa.

b) (1p) Finns det något **träd** med åtta hörn med valenser 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4?

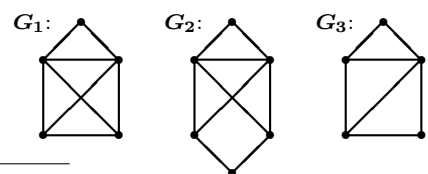
Lösning:

Totala valensen stämmer och man finner ett exempel:

Svar: Ja, t.ex. som i figuren.



c) (1p) Vilken av G_1 , G_2 , G_3 har kromatiskt polynom $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$?



Lösning:

$P(\lambda)$ har grad 5, så grafen har 5 hörn, så **inte G_2** .

$P(3) = 0$, men G_3 kan färgas med 3 färger, så **inte G_3** .

Svar: $P(\lambda)$ måste vara kromatiskt polynom för G_1 .

(Alternativt: De fyra nedre hörnen i G_1 kan färgas på $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ sätt, sedan det sista på $\lambda - 2$.)

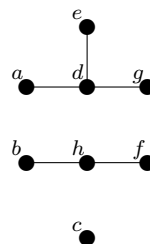
3) Grafen G beskrivs av **granntabellen**:

Vi skall (a, 2p) lägga till ett hörn x och kanter mellan x och hörn i G , så att ett träd bildas och (b, 1p) ange på hur många sätt det kan göras.

a	b	c	d	e	f	g	h
d	h		a	d	h	d	b
			e				f
			g				

Lösning:

a) G består av tre komponenter (alla utan cykler, dvs träd) med hörnmängder $\{a, d, e, g\}$, $\{b, f, h\}$ och $\{c\}$. Resultatet då x med kanter läggs till G blir sammanhängande precis om x har minst en granne i varje komponent och utan cykler blir det precis om x inte har två grannar i någon komponent. Resultatet blir alltså ett träd precis om x har exakt en granne i var och en av G 's komponenter. x 's grannar kan alltså t.ex. vara a , b och c .



b) x 's granne i första komponenten kan väljas på 4 sätt, den i den andra på 3 sätt och i den tredje komponenten måste det vara c . Multiplikationsprincipen ger det totala antalet sätt att välja x 's grannar som $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$.

Svar a: x 's grannar kan vara a , b och c . b: De kan väljas på 12 sätt.

(Det finns enligt ovan förstås (se b) fler korrekta svar i a.)

4) (3p) En 3-reguljär, sammanhängande graf med 60 hörn har ritats på en sfäryta så att inga kanter korsar varandra.

Vi söker antalet områden grafen delar in sfären i.

Lösning:

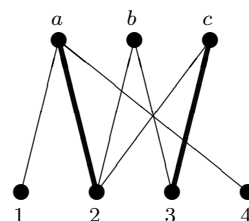
Grafen är plan och sammanhängande, så med v hörn, e kanter och r ytor gäller $v - e + r = 2$ (Eulers polyederformel).

Summan av valenserna (här är de alla 3) är $2e$, dvs $e = \frac{1}{2} \cdot 3v = 90$.

Det ger antalet ytor $r = 2 - v + e = 32$.

Svar: Sfären delas in i 32 ytor.

5) (3p) I vidstående bipartita graf är matchningen $\{a2, c3\}$ markerad med tjockare kanter. Vi söker alla **utökande alternerande stigar** för matchningen och den fullständiga matchning som fås med hjälp av en av dem.



Lösning:

Utökande alternerande stigar (dvs alternerande stigar som börjar och slutar i omatchade hörn) är $b2a1$, $b2a4$, $b3c2a1$ och $b3c2a4$ (utgå från ett omatchat hörn och finn alla möjliga alternerande stigar som leder till ett omatchat hörn). De ger matchningarna $\{a1, b2, c3\}$, $\{a4, b2, c3\}$, $\{a1, b3, c2\}$ och $\{a4, b3, c2\}$.

Svar: Stigar $b2a1$, $b2a4$, $b3c2a1$, $b3c2a4$, motsvarande matchningar respektive $\{a1, b2, c3\}$, $\{a4, b2, c3\}$, $\{a1, b3, c2\}$, $\{a4, b3, c2\}$.

En av matchningarna räcker förstås som svar.