Svar och lösningsförslag till ks3, 4 april 2011, i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Om $(G, *)$ är en grupp, gäller säkert för alla $a, b, c, d \in G$ att $(a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d$. [Ja. Det följer ur den associativa egenskapen för $*$.]	×	
b)	För varje naturligt tal m är $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ en abelsk grupp. [Nej, det är inte ens en grupp (0 saknar invers).]		×
c)	$\{\pi \in S_7 \mid \pi(3) = 3\}$ är en delgrupp till S_7. [Ja, den är ($\neq \varnothing$, ty id ingår och) sluten under multiplikation.]	×	
d)	$\{\pi \in S_8 \mid \{\pi(3), \pi(6)\} = \{3, 6\}\}$ är en delgrupp till S_8. [Ja, liksom i c).]	×	
e)	En permutation av jämn ordning är säkert en udda permutation. [Nej. $(1\,2)(3\,4) \in S_4$ är jämn och av ordning 2.]		×
f)	$(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$ är en ring. [Javisst. Ett standardexempel.]	×	

2a) (1p) Låt $(G, *)$ vara en grupp med identitetselement 1 och $a, b, c \in G$. Om $a * (b * c) = 1$, måste då $b * (c * a) = 1$? Motivera ditt svar.

Lösning:

$a*(b*c) = 1 = a*a^{-1}$ ger att $b*c = a^{-1}$, så $b*(c*a) = (b*c)*a = a^{-1}*a = 1$.

Svar: Ja.

---

b) (1p) Avgör med motivering om det finns någon delgrupp till S_8 (gruppen av permutationer av $\{1, 2, \ldots, 8\}$) som är isomorf med $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

Lösning:

Isomorf med $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ betyder precis "cyklisk av ordning 10", så en sådan delgrupp finns omm det finns något element av ordning 10 i S_8. Det gör det, t.ex. $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7)$, ty $o(\pi) = \text{mgm}(5, 2) = 10$.

Svar: Ja, det gör det, t.ex. delgruppen som genereras av π ovan.

---

c) (1p) Permutationen $\pi \in S_{11}$ ges i tvåradsform av

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 9 & 10 & 1 & 8 & 5 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Avgör om π är en jämn eller en udda permutation. Motivera ditt svar.

Lösning:

π är i cykelform $(1\,7)(2\,6\,10\,4)(3)(5\,9)(8)(11)$, så den är udda (ett udda antal (3) cykler av jämn längd, alt. $11 - c(\pi) = 11 - 6 = 5$ är udda).

Svar: π är en udda permutation.

---

3) Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{22}), \cdot)$, dvs de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{22}$, med operationen multiplikation.
a) (1p) Ange alla element i G.
b) (2p) Avgör om G genereras av elementet 5.

Lösning:

a) $U(\mathbb{Z}_{22}) = \{x \in \mathbb{Z}_{22} \mid \text{sgd}(x, 22) = 1\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21\}$.
b) 5 genererar G precis om dess ordning, $o(5)$, är $|G| = 10$. Eftersom $o(5) \mid |G|$ är $o(5) = 10$ omm $o(5) \neq 1, 2, 5$, dvs om $5^1, 5^2, 5^5 \neq 1$ i G. Man finner $5^1 = 5$, $5^2 = 3$, $5^5 = (5^2)^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 1$ i $\mathbb{Z}_{22}$, så $o(5) = 5$.

Svar a): $\boldsymbol{G = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21\}}$, b): Nej, det gör $\boldsymbol{G}$ inte.

---

4) Låt gruppen $(G, *)$ ha precis 5 element, $G = \{1, a, b, c, d\}$.
1 är identitetselementet i G och $a * a = b$.
a) (1p) Vad (dvs vilket element i G) är a^5 (dvs $a * a * a * a * a$)?
b) (1p) Finn ett positivt heltal n så att $b^n = a$.
c) (1p) Vad (dvs vilket element i G) är $c * d$?
Glöm inte att motivera dina svar.

Lösning:

a) I varje ändlig grupp gäller $g^{|G|} = 1$ för alla $g \in G$, så $a^5 = 1$.
b) $b = a^2$, så $b^3 = a^6 = a^5 * a = 1 * a = a$.
c) Eftersom $|G| = 5$ är ett primtal, genereras G av alla element utom 1. a, b, c, d är alltså a^1, a^2, a^3, a^4 i någon ordning. $a = a^1$, $b = a^2$, så $c = a^3$ och $d = a^4$ eller tvärtom och $c * d = a^{3+4} = a^5 * a^2 = a^2 = b$.

Svar a): $\boldsymbol{a^5 = 1}$, b): $\boldsymbol{n = 3}$ (eller 8, 13, ...), c): $\boldsymbol{c * d = b}$.

---

5) Låt $\pi, \sigma \in S_7$ (gruppen av alla permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) ges av (på tvåradsform)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1p) Finn **på cykelform** π, σ^{-1} och $\pi\sigma^{-1}$.
b) (1p) Visa att det finns ett $\tau \in S_7$ så att $\tau\pi = \sigma^{-1}\tau$.
c) (1p) Ange (på cykelform) ett $\tau \in S_7$ som uppfyller villkoret i b).

Lösning:

a) $\pi(1) = 2, \pi(2) = 7, \pi(7) = 6$ etc ger $\pi = (1\,2\,7\,6)(3\,5)(4)$ och pss $\sigma = (1\,5)(2\,4\,7\,3)(6)$, så $\sigma^{-1} = (1\,5)(2\,3\,7\,4)(6)$.
I $\pi\sigma^{-1}$ verkar först σ^{-1}, sedan π. Man finner $\pi\sigma^{-1} = (1\,3\,6)(2\,5)(4\,7)$.
b) $\tau\pi = \sigma^{-1}\tau$ om och endast om $\tau\pi\tau^{-1} = \sigma^{-1}$. Ett sådant τ finns alltså omm π och σ^{-1} är konjugerade permutationer. Det är de, ty de har samma cykelstruktur ([124]), lika många cykler av varje längd. **Saken är klar.**
c) $\tau\pi\tau^{-1} = \tau(1276)\tau^{-1}\tau(35)\tau^{-1}\tau(4)\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(2)\tau(7)\tau(6))(\tau(3)\tau(5))(\tau(4))$, så ett möjligt val av τ ges av $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 3$, $\tau(3) = 1$, $\tau(4) = 6$, $\tau(5) = 5$, $\tau(6) = 4$, $\tau(7) = 7$ (de lika långa cyklerna skall motsvara varandra), så $\tau = (1\,2\,3)(4\,6)(5)(7)$

Svar a): $\boldsymbol{\pi = (1\,2\,7\,6)(3\,5)(4)}$, $\boldsymbol{\sigma^{-1} = (1\,5)(2\,3\,7\,4)(6)}$,
$\boldsymbol{\pi\sigma^{-1} = (1\,3\,6)(2\,5)(4\,7)}$, c): $\boldsymbol{\tau = (1\,2\,3)(4\,6)(5)(7)}$ (t.ex.).
