

**Svar och lösningsförslag till ks2, 7 mars 2011,
i SF1610 Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}p$, inget svar $0p$, fel svar $-\frac{1}{2}p$.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Enligt additionsprincipen gäller för godtyckliga ändliga mängder A och B att $ A \cup B = A + B $. [Nej, bara för disjunkta mängder, dvs då $A \cap B = \emptyset$.]		×
b) Händelserna A och B är oberoende precis om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. [Ja, det är definitionen av oberoende händelser.]	×	
c) Om p är ett primtal och k ett heltal med $0 < k < p$ är binomialtalet $\binom{p}{k}$ delbart med p . [Ja, $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(n-k)!}$ och nämnaren innehåller ingen faktor p .]	×	
d) För ändliga A, B : (antalet injektioner $A \rightarrow B$) · (antalet surjektioner $A \rightarrow B$) är antingen 0 eller $ A ! \cdot B !$. [Ja, om $ A \neq B $: 0, om $ A = B $: båda antalet bijektioner.]	×	
e) Antalet sätt ställa n personer på led utan att Kalle och Olle (2 av personerna) står intill varandra är $n! - (n-1)!$. [Nej, det är $n! - 2(n-1)!$ (2 inbördes ordningar).]		×
f) Om sannolikheten är likformigt fördelad är händelserna A och B automatiskt oberoende. [Nej, inte alls. $A = B$, $P(A) \neq 0, 1$ ger motexempel.]		×

2a) (1p) Vi skall beräkna summan $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (3^k + 2^{10-k})$.

Lösning:

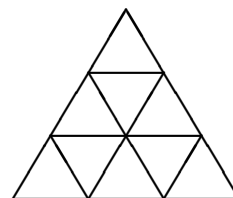
Enligt binomialsatsen blir den $(1+3)^{10} + (2+1)^{10} = 4^{10} + 3^{10} (= 1107625)$.

Svar: Summan är $4^{10} + 3^{10} (= 1107625)$.

b) (1p) Vi har 10 punkter i en liksidig triangel med sida 3 och skall visa att minst två av dem har avstånd högst 1.

Lösning:

Vi delar in triangeln i 9 småtrianglar med sida 1, se fig. Enligt postfacksprincipen finns en småtriangel med minst två punkter. Avståndet mellan de punkterna är högst 1, så **saken är klar**.



c) (1p) Hur många surjektioner $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c\}$ finns det?

Lösning:

Antalet surjektioner från en n -mängd på en k -mängd är $k! \cdot S(n, k)$, där $S(n, k)$ är ett stirlingtal (av andra slaget). I vårt fall alltså $3! \cdot S(6, 3) = 6 \cdot 90 = 540$, där $S(6, 3) = 90$ fås ur "triangeln" till höger.

			1		
		1		1	
1			3		1
	7			6	
15		25			
	90				

Svar: Det finns 540 surjektioner.

3) (3p) 20 kort skall läggas i ordning. På hur många sätt kan det ske om det är 10 vita, 5 svarta och 5 med andra färger, alla olika?

De vita korten betraktas som identiska och det gör de svarta också (inte identiska med de vita förstås), men övriga 5 är alla olika.

Lösning:

Det gäller att för varje position i ordningen välja färg för kortet där. De 20 positionerna kan fördelas med 10 vita, 5 svarta och en vardera av övriga färger på $\binom{20}{10,5,1,1,1,1,1} = \frac{20!}{10!5!1!1!1!1!}$ sätt (multinomialtal).

(Man kan få samma resultat också på andra sätt.)

Svar: De kan ordnas på $\frac{20!}{10!5!} (= 5587021440)$ sätt.

4a) (1p) Under ett 60 dagar långt skollov skall 15 olika museer besökas. Varje museum ägnas precis en dag. På hur många sätt kan besöken fördelas?

b) (2p) Hur många sätt är möjliga om man aldrig har två museidagar i rad?

Lösning:

a) Fördelningar av museidagarna svarar precis mot ett val av dag för varje museum, alla olika, dvs mot en injektion $\{\text{museer}\} \rightarrow \{\text{lovdagar}\}$. Antalet är alltså $(60)_{15} = \frac{60!}{45!}$.

b) När det inte får vara två museidagar i rad, kan man betrakta de $60 - 15 = 45$ museifria dagarna som ”väggar” och placera museidagarna med högst en i vart och ett av de 46 facken mellan och intill dem. Det kan göras på $(46)_{15} = \frac{46!}{31!}$ sätt (injektion 15-mängd till 46-mängd).

Svar a: $\frac{60!}{45!} (= 69560546966425756200960000)$ sätt,

b: $\frac{46!}{31!} (= 669187660275478536192000)$ sätt.

5) (3p) Vid en skrivning med 3 uppgifter, a), b) och c), var det 7 skrivande som klarade både a) och b), 6 som klarade både b) och c) och 10 som klarade både c) och a). (Delpoäng gavs inte, varje uppgift bedömdes klarad eller inte.) Exakt två klarade uppgifter gav betyg G och tre klarade uppgifter gav VG. Hur många fick G, om det var 4 som fick VG?

Lösning:

Låt A vara mängden av dem som klarade uppgift a) och p.s.s. B , C de som klarade b), c).

Vi vet att $|A \cap B| = 7$, $|B \cap C| = 6$, $|C \cap A| = 10$ och $|A \cap B \cap C| = 4$. Betyg G fick de som klarade minst två men inte tre uppgifter. Deras antal är alltså $|((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C)| = |(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)| - |A \cap B \cap C| = |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - (|(A \cap B) \cap (B \cap C)| + |(B \cap C) \cap (C \cap A)| + |(C \cap A) \cap (A \cap B)|) + |(A \cap B) \cap (B \cap C) \cap (C \cap A)| - |A \cap B \cap C| = |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - 3|A \cap B \cap C| = 7 + 6 + 10 - 3 \cdot 4 = 11$.

Alternativt (enklare) med Venndiagram eller: $7 - 4 = 3$ klarade a) och b) men inte c), $6 - 4 = 2$ klarade b) och c) men inte a) och $10 - 4 = 6$ klarade c) och a) men inte b). Det sökta: $3 + 2 + 6 = 11$.

Svar: 11 skrivande fick G på skrivningen.
