Matematik, KTH

Svar och lösningsförslag till ks1, 21 februari 2011, i SF1610 Diskret matematik för CL

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Låt $a, b \in \mathbb{N}$. Då gäller $\mathrm{sgd}(a,b) = \mathrm{mgm}(a,b)$ om och endast om $a = b$. [Ja, $\Rightarrow$: $a \mid \mathrm{mgm}(a,b) = \mathrm{sgd}(a,b) \mid b$ och p.s.s. $b \mid a$ ger $a = b$. $\Leftarrow$: $a = b$ ger $\mathrm{sgd}(a,b) = a = \mathrm{mgm}(a,b)$.]	X	
b)	För alla heltal x, y gäller att $27x + 84y \neq 99$. [Nej, $\mathrm{sgd}(27, 84) = 3$ och $3 \mid 99$, så det finns lösningar.]		X
c)	Det finns inget $x \in \mathbb{Z}_{158}$ så att $x + x$ är inverterbart. [Ja, $x + x$ är jämnt, så $\mathrm{sgd}(x + x, 158) \neq 1$.]	X	
d)	För godtyckliga mängder A, B och C gäller $A \setminus (B \cup C)^c = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. [Ja, ses t.ex. med Venndiagram eller räkneregler för mängder.]	X	
e)	Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ och $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ kan $gf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inte vara injektiv. [Ja, $\lvert\mathbb{Q}\rvert = \lvert\mathbb{N}\rvert < \lvert\mathbb{R}\rvert$ så f är inte injektiv och därmed inte gf.]	X	
f)	Den binära relationen "$\mid$", dvs delbarhet, på mängden av naturliga tal, $\mathbb{N}$, är en **partialordning**. [Ja, den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv, så en partialordning.]	X	

2a) (1p) $a = (114)_{10}$, så i bas 10 skrivs talet a som 114. Hur skrivs a i bas 3?

Lösning:

Succesiv division ger $114 = 38 \cdot 3 + 0$, $38 = 12 \cdot 3 + 2$, $12 = 4 \cdot 3 + 0$, $4 = 1 \cdot 3 + 1$, $1 = 0 \cdot 3 + 1$, så (läs resterna bakifrån) $a = (11020)_3$. (Eller se på annat sätt att $114 = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 0$.)

Svar: $\boldsymbol{a = (11020)_3}$**.**

---

b) (1p) Vi söker $1 + 2 \cdot 3^{-1}$ i $\mathbb{Z}_7$.

Lösning:

Eftersom $3 \cdot 5 = 15 = 2 \cdot 7 + 1$ är $3^{-1} = 5$ i $\mathbb{Z}_7$. Så $1 + 2 \cdot 3^{-1} = 1 + 2 \cdot 5 = 11 = 4$ i $\mathbb{Z}_7$.

Svar: $\boldsymbol{1 + 2 \cdot 3^{-1} = 4}$ **i** $\boldsymbol{\mathbb{Z}_7}$**.**

---

c) (1p) $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{P})$ definieras enligt $f(x) = \{y \in \mathbb{P} \mid y \text{ är en delare till } x\}$. Är f en injektion? En surjektion? En bijektion?

Lösning:

$f(2) = \{2\} = f(4)$, så f är inte en injektion. Om $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{P})$ gäller $f(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) = A$ (speciellt $f(1) = \varnothing$), så f är en surjektion. Eftersom f inte är injektiv är den inte en bijektion.

Svar: $\boldsymbol{f}$ **är en surjektion, men ingen injektion eller bijektion.**

---

3) Vi söker dels (a, 2p) den största gemensamma delaren $\mathrm{sgd}(1176, 966)$ till de båda talen 1176 och 966 och dels (b, 1p) den minsta gemensamma multipeln $\mathrm{mgm}(1176, 966)$ till samma tal.

Lösning:

Vi använder Euklides algoritm och finner:
$1176 = 1\cdot 966+210$, $966 = 4\cdot 210+126$, $210 = 1\cdot 126+84$, $126 = 1\cdot 84+42$, $84 = 2 \cdot 42 + 0$, så $\mathrm{sgd}(1176, 966) = 42$.
Eftersom $\mathrm{sgd}(a, b)\,\mathrm{mgm}(a, b) = ab$ för alla a, $b \in \mathbb{N}$ får vi $\mathrm{mgm}(1176, 966) = \frac{1176\cdot 966}{\mathrm{sgd}(1176,966)} = \frac{1176\cdot 966}{42}(= 27048)$.

Svar a: $\mathbf{sgd(1176, 966) = 42}$, b: $\mathbf{mgm(1176, 966)} = \frac{\mathbf{1176\cdot 966}}{\mathbf{42}}\mathbf{(= 27048)}$.

---

4) Vi söker antalet kvadrater i dels (a, 1p) $\mathbb{Z}_{11}$ och dels (b, 2p) $\mathbb{Z}_p$, då p är ett udda primtal.

Lösning:

I $\mathbb{Z}_{11}$ finner vi $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 5$, $5^2 = 3$, $6^2 = 3$, $7^2 = 5$, $8^2 = 9$, $9^2 = 4$, $10^2 = 1$, så kvadraterna är 0, 1, 3, 4, 5, 9, dvs 6 stycken.
I $\mathbb{Z}_p$, p udda primtal, gäller att $x^2 = y^2$ precis om $p \mid x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, så ($p$ primtal) precis om minst en av $p \mid x + y$ och $p \mid x - y$, så precis om $(0 \leq x,\ y \leq p-1)$ $x+y = 0$, $x+y = p$ eller $x-y = 0$. Enda möjligheterna är alltså $y = p - x$ och $x = y$, så alla $x = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}$ ger olika kvadrater, men övriga ger upprepningar (som för $\mathbb{Z}_{11}$). Det sökta antalet är alltså $1 + \frac{p-1}{2} = \frac{p+1}{2}$.

Svar a: $\mathbb{Z}_{11}$ har 6 kvadrater, b: $\mathbb{Z}_p$, p udda primtal, har $\frac{p+1}{2}$ stycken.

---

5) (3p) Fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras, som vanligt, av $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Vi skall med ett induktionsbevis visa att $1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Lösning:

Vi skall visa påståendet $P(n) : 1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$ för $n \in \mathbb{N}$.
Bas: $\mathrm{VL}_0 = 1$, $\mathrm{HL}_0 = F_{2\cdot 0+1} = F_1 = 1$, så $P(0)$ är sann.
Steg: Låt $k \in \mathbb{N}$ och antag $P(k)$, dvs att $1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2k} = F_{2k+1}$.
Då är $\mathrm{VL}_{k+1} = 1+F_2+F_4+\ldots+F_{2k}+F_{2k+2} = \mathrm{VL}_k+F_{2k+2} \overset{\text{ind.ant.}}{=} \mathrm{HL}_k+F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k+2} \overset{\text{def. av } F_i}{=} F_{2k+3} = \mathrm{HL}_{k+1}$, dvs $P(k + 1)$ blir sann och vi har visat att $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ för alla $k \in \mathbb{N}$, **steget är klart**.
Induktionsprincipen ger nu att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar**.