

KTH Matematik

B.Ek

**Svar och lösningsförslag till ks5, 19 maj 2010,
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

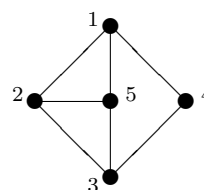
	sant	falskt
a) Om en graf har en eulerkrets som också är en hamilton-cykel, måste grafen vara en cyklisk graf C_n . [Ja. Eulerkretsen innehåller alla grafens kanter, hamiltoncykeln alla dess hörn.]	×	
b) Den fullständiga (kompleta) grafen K_3 och den cykliska grafen C_3 är isomorfa. [Ja, så är det.]	×	
c) Antalet kanter i den fullständiga grafen K_n är $\frac{1}{2}n(n+1)$. [Nej, men $\frac{1}{2}n(n-1)$.]		×
d) Om x och y är två olika hörn (noder) i ett träd T , finns precis en stig i T från x till y . [Ja, det är en känd egenskap för träd (som kan definiera dem).]	×	
e) Varje planär graf har minst ett hörn med valens (grad) högst 4. [Nej, högst 5 (ikosaederns graf är planär och 5-reguljär).]		×
f) Om en matchning i en bipartit graf saknar en utökande alternerande stig, är matchningen maximal. [Ja, en icke-maximal matchning har en utökande alternerande stig.]	×	

2a) (1p) Visa med en figur att en graf G med **grannmatrisen** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ är **planär**.

Lösning:

Grafen är planär precis om den är isomorf med en plan graf. I figuren är grafen ritad plan.

Många andra sätt att rita är möjliga. (Det är förstås tillåtet med krökta kanter.) De små siffrorna svarar mot radernas numrering i matrisen.



b) (1p) Finns det något **träd** med åtta hörn med valenser 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 5? Motivera ditt svar.

Lösning:

För ett träd $T = (V, E)$ gäller $|V| = |E| + 1$ (om $V \neq \emptyset$). Summan av valenserna är $2|E|$, i vårt fall $2|E| = 1 + 1 + \dots + 5 = 16$, så $|E| = 8 = |V|$. Det är inte valenser för ett träd. **Svar: Nej, inget träd har de valenserna.**

c) (1p) Avgör om det finns en **transversal** till mängderna $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, genom att ange en eller motivera att ingen existerar.

Lösning:

Första, tredje och femte mängderna innehåller totalt tre element, så 1, 2, 3 behövs som representanter för dem. Fjärde mängden får 5 och den andra 4.

Svar: Ja, en transversal ges t.ex. av (i ordning) $\{1, 4, 3, 5, 2\}$.

3) Grafen G beskrivs av **granntabellen**:

a	b	c	d	e	f
b	a	a	b	a	c
c	d	d	c	f	d
e		f	f		e

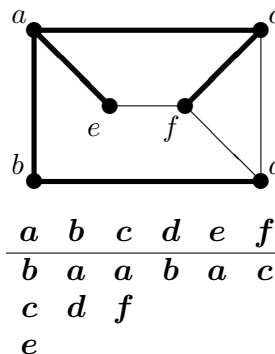
a) (1p) Rita (en graf som är isomorf med) G .

b) (2p) Ange granntabellen för ett **spännande träd** till G .

Lösning:

Ett sätt att rita G visas i figuren. Många andra sätt finns.

Ett spännande träd kan fås genom att lägga till kanter tills det inte går utan att cykler skapas. Alternativt upprepat ta bort en kant ur varje cykel. Så fås



Svar: Ett spännande träd (feta linjer i fig.) ges av

a	b	c	d	e	f
b	a	a	b	a	c
c	d	f			
e					

4) (3p) En 3-reguljär, plan och sammanhängande graf har 3 fler hörn (noder) än det antal ytor (fasetter) grafen delar in planet i (inklusive den obegränsade ytan). Hur många hörn har grafen?

Lösning:

Låt grafen ha v hörn, e kanter och $r = v - 3$ ytor.

$\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$ ger $3v = 2e$ och Eulers polyederformel $v - e + r = 2$ ger $2v - 2e + 2r = 4$. Således $2v - 3v + 2(v - 3) = 4$, dvs $v = 10$.

Svar: Grafen har 10 hörn.

5) (1p) Vad är **det kromatiska talet** $\chi(G)$ för grafen G med kromatiskt polynom $P_G(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^4((\lambda - 1)^3 + 1)$?

Lösning:

$P_G(0) = P_G(1) = P_G(2) = 0$, $P_G(3) = 18$ betyder att G inte kan hörnfärgas med 0, 1 eller 2 färger, men att det går med 3 färger, så **Svar: $\chi(G) = 3$**

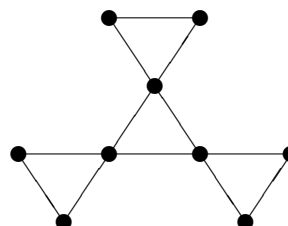
b) (2p) Finn det **kromatiska polynomet** $P_H(\lambda)$ för grafen H i figuren. Ge $P_H(\lambda)$ som en produkt av potenser av förstgradsuttryck.

Lösning:

Triangeln i mitten kan färgas på $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ sätt. För var och en av dessa ger varje yttre triangel $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ st olika färgningar, så multiplikationsprincipen ger

Svar: H 's kromatiska polynom är

$$P_H(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^4(\lambda - 2)^4.$$



Alternativt kan man använda resultatet i Ö10:3 tre gånger.