Svar och lösningsförslag till ks3, 12 april 2010, i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	**falskt**
a)	Om $(G, *)$ är en grupp gäller säkert för alla $a, b, c \in G$ att $a * (b * c) = (c * a) * b$.) [Nej. $b = 1$ skulle ge $a * c = c * a$ för alla a, $c \in G$.]		×
b)	Alla grupper av ordning 17 är abelska. [Ja, 17 är ett primtal, så de är alla cykliska, så abelska.]	×	
c)	$G_\triangle$, symmetrigruppen för en liksidig triangel, är isomorf med S_3, gruppen av permutationer av $\{1,\ 2,\ 3\}$. [Ja, element i $G_\triangle$ svarar mot permutationer av hörnen.]	×	
d)	Om H_1 och H_2 är delgrupper till gruppen G, måste $H_1 \cap H_2$ också vara det. [Ja, den är ($\neq \varnothing$ och) sluten under $*$ och $^{-1}$.]	×	
e)	Om $\pi \in S_n$ är en udda permutation, är dess ordning säkert ett udda tal. [Nej. $(1\,2) \in S_2$ är udda och av ordning 2.]		×
f)	Om p är ett primtal är $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ en kropp, men inte en ring. [Nej. Den är både och. Varje kropp är en ring.]		×

2a) (1p) Låt $(G, *)$ vara en grupp av ordning 1000, dvs $|G| = 1000$. Hur många lösningar har ekvationen $x * (x * x) = 1$ i G, dvs hur många tredjerötter till identitetselementet finns det i G? Motivera ditt svar.

Lösning:

$g^3 = 1$ ger att $o(g)|3$ och $g \in G$, $|G| = 1000$ ger $o(g)|1000$, så alla lösningar till $x^3 = 1$ har ordning 1, dvs är identitetselementet.

Svar: Det finns bara en lösning (nämligen $x = 1$).

---

b) (1p) Låt H vara delgruppen $\{(1),\ (2\,3)\}$ till gruppen S_3 av permutationer av $\{1,\ 2,\ 3\}$. Finn alla **högersidoklasser** (i S_3) till H.
(Här betecknar förstås (1) och $(2\,3)$ permutationer i S_3, skrivna i cykelform.)

Lösning:

Högersidoklassen $Hg = \{hg \mid h \in H\}$, så $H(1) = H(2\,3) = \{(1),\ (2\,3)\}$, $H(1\,2) = H(1\,3\,2) = \{(1\,2),\ (1\,3\,2)\}$, $H(1\,3) = H(1\,2\,3) = \{(1\,3),\ (1\,2\,3)\}$.

Svar: H:s högersidoklasser är $\{(1),\ (2\,3)\}$, $\{(1\,2),\ (1\,3\,2)\}$, $\{(1\,3),\ (1\,2\,3)\}$.

---

c) (1p) Låt som vanligt S_9 vara gruppen av permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ange vilka av följande som är möjliga **ordningar** för element i S_9 och vilka som är omöjliga: 1, 3, 11, 14, 15, 16, 20, 25.

Lösning:

Om π har cykellängderna $m_1, \ldots, m_k$ är $o(\pi) = \mathrm{mgm}(m_1, \ldots, m_k)$, så möjliga är 1 [cykler 1^9], 3 [ex. 3^3], 14 [27], 15 [135], 20 [45], omöjliga är 11, 16, 25.

Svar: Möjliga är 1, 3, 14, 15, 20. Omöjliga är 11, 16, 25.

3) Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{18}), \cdot)$, dvs de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{18}$, med operationen multiplikation.
a) (1p) Ange alla element i G.
b) (2p) Ange alla element i den minsta delgrupp till G som innehåller elementet 7.

Lösning:
a) $U(\mathbb{Z}_{18}) = \{x \in \mathbb{Z}_{18} \mid \text{sgd}(x, 18) = 1\} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
b) Den minsta delgruppen genereras av 7. $7^2 = 13$, $7^3 = 13 \cdot 7 = 1$, så sökta delgruppen är $\{1, 7, 13\}$.
Svar a): $G = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$, b): $\{1, 7, 13\}$.

---

4) (3p) I grupptabellen för gruppen $(G, *)$ finns två rader enligt nedan. Fyll i de tomma positionerna (markerade _).
Ledning: Kan a vara identitetselementet i G?
Vad är a:s ordning, $o(a)$?
Vilket element är identitetselement i G?
Kom ihåg att motivera din lösning.

$*$	a	b	c	d	f
a	b	_	d	_	_
b	_	c	_	_	_

Lösning:
$|G| = 5$, ett primtal, och a är inte identitetselementet (ty $a * a \neq a$), så $o(a) = 5$. Ur tabellen fås $b = a^2$, $c = b^2 = a^4$ och $d = a * c = a^5 = 1$. Då är $a * d = a$, $b * d = b$ och $a^3 = f$. Vidare $a * b = b * a = a^3 = f$, $a * f = a^4 = c$, $b * c = a^6 = a$, $b * f = a^5 = 1 = d$. Det ger tabellen:

$\boldsymbol{*}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{d}$

---

5) Låt $\pi, \sigma \in S_8$ (gruppen av alla permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ 8\}$) ges av (tvåradsform)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) (1p) Finn **på cykelform** π, σ och $\pi\sigma$.
b) (1p) Finn **ordningarna** för π, σ och $\sigma\pi$.
c) (1p) Avgör för var och en av π, σ och $\pi\sigma^2\pi^3\sigma^4\pi^5$ (dvs $\pi\sigma\sigma\pi\pi\pi\ldots$) om den är en **jämn** eller en **udda** permutation.

Lösning:
a) $\pi(1) = 6$, $\pi(6) = 1$ etc ger $\pi = (1\,6)(2\,8\,3\,5\,7)(4)$ och pss $\sigma = (1)(2\,6\,8\,3\,7\,4\,5)$. I $\pi\sigma$ verkar först σ, sedan π. Man finner $\pi\sigma = (1\,6\,3\,2)(4\,7)(5\,8)$.
b) $o(\pi) = \text{mgm}(2, 5, 1) = 10$, $o(\sigma) = \text{mgm}(1, 7) = 7$, $o(\sigma\pi) = o(\pi\sigma) = \text{mgm}(4, 2, 2) = 4$ (alt. $\sigma\pi = (1\,8\,7\,6)(2\,3)(4\,5)$).
c) En permutation är jämn precis om antalet cykler av jämn längd är jämnt, så π är udda och σ är jämn. Produkten $\pi\sigma^2\pi^3\sigma^4\pi^5$ innehåller den udda permutationen π ett udda antal (9) gånger (och den jämna σ ett antal gånger), så den är udda.
Svar:
a) $\boldsymbol{\pi = (1\,6)(2\,8\,3\,5\,7)}$, $\boldsymbol{\sigma = (2\,6\,8\,3\,7\,4\,5)}$, $\boldsymbol{\pi\sigma = (1\,6\,3\,2)(4\,7)(5\,8)}$,
b) $\boldsymbol{o(\pi) = 10}$, $\boldsymbol{o(\sigma) = 7}$, $\boldsymbol{o(\sigma\pi) = 4}$,
c) $\boldsymbol{\pi}$ är udda, $\boldsymbol{\sigma}$ är jämn och $\boldsymbol{\pi\sigma^2\pi^3\sigma^4\pi^5}$ är udda.
