

**Svar och lösningsförslag till ks2, 8 mars 2010,
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Multiplikationsprincipen ger att $ A \times B = A \cdot B $ om A, B är ändliga mängder. ($ M $ är antalet element i M). [Ja.]	×	
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ gäller säkert om händelserna A och B är oberoende . [Nej, oberoende: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.]		×
c) Om A och B är ändliga mängder är säkert antalet injektioner $f: A \rightarrow B$ = antalet surjektioner $g: B \rightarrow A$. [Nej, inte alls. $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$ ger 2 injektioner, 1 surjektion.]		×
d) Då $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, gäller $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$. [Ja, det stämmer, båda är $\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$.]	×	
e) Om minst $n+2$ brev fördelas på högst n postfack, måste minst 2 fack innehålla minst 2 brev vardera. [Nej, inte om t.ex. alla breven ligger i samma fack.]		×
f) Antalet surjektioner från en n -mängd på en k -mängd är $n! \cdot S(n, k)$. [Nej, $k! \cdot S(n, k)$ skall det vara.]		×

2a) (1p) Förklara varför

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \dots$$

$\binom{n}{k}$ betecknar förstås ett binomialtal.

Lösning:

Enligt **binomialsatsen**: $3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k$. Det givna följer.

b) (1p) Hur många "ord" med 4 st 'a', 3 st 'b' och ett 'c' (och inga andra bokstäver) finns det?

Lösning:

Antalet sätt att välja 4 positioner med 'a', 3 med 'b' och 1 med 'c' ges av multinomialtalet $\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 280$.

Svar: 280 olika ord.

c) (1p) Hur många **injektioner** $f: A \rightarrow B$ finns om $|A| = 72$ och $|B| = 97$? Svaret får innehålla heltal, potenser, fakulteter och de fyra vanliga räknesätten.

Lösning:

Antalet injektioner är $97 \cdot 96 \cdot 95 \dots (97 - 72 + 2) \cdot (97 - 72 + 1) = \frac{97!}{25!}$ (ordnat urval utan upprepning eller multiplikationsprincipen direkt).

Svar: Antalet injektioner är $\frac{97!}{25!}$.

3) (3p) I ett led placeras 4 flickor och 5 pojkar så att inga två pojkar står intill varandra. Placeringen görs slumpmässigt och likafördelat, dvs alla tillåtna ordningar är lika sannolika.

Vad är sannolikheten att Olle (pojke) har både Lisa och Stina (flickor) intill sig?

Lösning:

Totala antalet tillåtna placeringar är $5! \cdot 4!$ (multiplikationsprincipen, pojkarna placeras på de udda platserna och flickorna på de jämna) och antalet där Olle står mellan Lisa och Stina är $3 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 2!$ (Olle kan stå på plats 3, 5 eller 7, med Lisa framför eller bakom sig, övriga 4 pojkar placeras på återstående 4 platser och flickorna på sina. Likafördelningen ger sannolikheten $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4! \cdot 2!}{5! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{10}$.

(Alternativt: sannolikheten att Olle står på plats 3, 5 eller 7 är $\frac{3}{5}$ och sannolikheten att de två intill honom är Lisa och Stina är $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$, så sökta sannolikheten $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.)

Svar: Den sökta sannolikheten är $\frac{1}{10}$, dvs 10 %.

4) (3p) Vid en tävling i diskret matematik deltar 12 tävlande.

Var och en av 111 personer i publiken röstar på någon av de tävlande och dessutom delas pris ut för skönhet, klarhet och snabbhet.

Hur många olika möjliga resultat finns det? Ett resultat beskrivs fullständigt av hur många publikröster var och en av de tävlande fått och vem av dem som fått vart och ett av de tre priserna (samma person kan få mer än ett av dem). Svaret får innehålla heltal, fakulteter och de fyra vanliga räknesätten.

Lösning:

111 publikröster kan fördelas på $\binom{111+12-1}{12-1}$ sätt (111 oordnade val bland 12, med upprepning) och de tre priserna kan fördelas på 12^3 sätt (antalet funktioner från en 3-mängd till en 12-mängd). Multiplikationsprincipen ger antalet resultat: $\binom{122}{11} \cdot 12^3 = \frac{122!}{11! \cdot 111!} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$

Svar: $\frac{122!}{11! \cdot 111!} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 (= 2424858744387695616)$ möjliga resultat.

5) (3p) Vid en skrivning med 3 uppgifter, a), b) och c), var det 10 skrivande som klarade uppgift a), 19 som klarade uppgift b) och 23 som klarade uppgift c).

Det var 6 stycken som inte klarade någon av uppgifterna, medan 6 stycken klarade både a) och b), 9 stycken klarade både b) och c) och 5 stycken klarade både a) och c). 2 av de skrivande klarade alla tre uppgifterna.

Hur många var det som skrev skrivningen?

Lösning:

Låt mängden av dem som klarade uppgift a) vara A och p.s.s. B och C .

Givet är att $|A| = 10$, $|B| = 19$, $|C| = 23$, $|A \cap B| = 6$, $|B \cap C| = 9$, $|A \cap C| = 5$ och $|A \cap B \cap C| = 2$.

Det sökta antalet är då $6 + |A \cup B \cup C|$ (additionsprincipen, de som inte klarade någon + de som klarade minst en). Enligt principen om inklusion och exklusion är det $6 + |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 6 + 10 + 19 + 23 - 6 - 9 - 5 + 2 = 40$.

Svar: Det var 40 skrivande.