

**Svar och lösningsförslag till ks1, 15 februari 2010,
i SF1610 Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) För alla $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gäller att $x \mid y$ om $x \mid (yz)$ och $\text{sgd}(x, z) = 1$. [Ja, det är innehållet i en känd sats.]	×	
b) ”Aritmetikens fundamentalsats” säger precis att det finns oändligt många primtal. [Nej, den handlar om entydig faktorisering i primtal.]		×
c) $x \equiv y \pmod{m}$ gäller precis om x och y slutar på samma siffra då de skrivs i bas m . [Ja, den sista siffran är resten vid division med m .]	×	
d) Det finns en bijektion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. [Nejdå, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$ har olika kardinalitet, $ \mathbb{Q} = \mathbb{N} < \mathbb{R} $.]		×
e) $ \{\emptyset\} = 0$, där $ A $ är antalet element i mängden A . [Nej, $\{\emptyset\}$ har precis ett element, $\emptyset$.]		×
f) Att en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är symmetrisk betyder precis att $x\mathcal{R}y$ medför $y\mathcal{R}x$, alla $x, y \in X$. [Ja, så är det.]	×	

2a) (1p) Ange tre element i $\mathbb{Z}_{20}$ som är inverterbara och tre som inte är det.

Lösning:

$r \in \mathbb{Z}_m$ är inverterbart precis om $\text{sgd}(r, m) = 1$, så inverterbara i $\mathbb{Z}_{20}$ är precis de som inte är delbara med någon av 20:s primfaktorer 2 och 5.

Svar: (Tre vardera av) inverterbara: 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 och inte inverterbara: 0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18.

b) (1p) Om $f: X \rightarrow Y$ är en injektion och $g: Y \rightarrow Z$ är en bijektion, vad kan säkert sägas om sammansättningen $gf: X \rightarrow Z$? (Dvs måste gf vara en injektion? en surjektion? en bijektion?)

Lösning:

En bijektion är både en injektion och en surjektion och en sammansättning av injektioner är en injektion. Exemplet $X = \{1\}$, $Y = Z = \{1, 2\}$, $f(1) = g(1) = 1$, $g(2) = 2$ visar att gf inte behöver vara en surjektion eller en bijektion. **Svar: gf är säkert en injektion, men inte säkert en surjektion eller en bijektion.**

c) (1p) Mängderna A, B, C ges av $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, A\}$ och $C = \{1, 2, 4, 6, B\}$. Ange alla element i mängden $(A \cup B) \cap C$.

Lösning:

Unionen $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, A\}$, så skärning med C ger

Svar: $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4\}$.

(B , som inte är ett element i $A \cup B$ skall förstås inte vara med.)

3) (3p) Finn det minsta positiva (dvs > 0) tal som kan skrivas som $154m + 182n$ med $m, n \in \mathbb{Z}$.

Lösning:

Det finns $m, n \in \mathbb{Z}$ så att $154m + 182n = \text{sgd}(154, 182)$ och för alla $m, n \in \mathbb{Z}$ gäller $\text{sgd}(154, 182) \mid (154m + 182n)$. Det sökta minsta värdet måste alltså vara $\text{sgd}(154, 182)$. Vi finner den med Euklides algoritm:

$182 = 1 \cdot 154 + 28$, $154 = 5 \cdot 28 + 14$, $28 = 2 \cdot 14 + 0$, så $\text{sgd}(154, 182) = 14$.

Svar: Det minsta värdet är 14.

4) (3p) Finn alla $x \in \mathbb{Z}_{21}$, så att $6x = 9$ i $\mathbb{Z}_{21}$.

Lösning:

$6x = 9$ i $\mathbb{Z}_{21}$ motsvarar $6x \equiv 9 \pmod{21}$, dvs $6x - 9 = 21k$, något $k \in \mathbb{Z}$, alltså $2x - 7k = 3$. Man ser (eller får med Euklides algoritm) att $2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1$, så $2 \cdot 12 - 7 \cdot 3 = 3$. Så $2x - 7k = 3$ omm $2(x - 12) = 7(k - 3)$, så $7 \mid (x - 12)$ och allmänna lösningen är $x = 12 + 7s$, där $s \in \mathbb{Z}$, dvs $x = 5 + 7t$ med $t \in \mathbb{Z}$. Så

Svar: Alla lösningar i $\mathbb{Z}_{21}$ är 5, 12, 19.

5) (3p) Talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ uppfyller $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n^2 \end{cases}$ för alla $n = 0, 1, 2, \dots$.
Visa med ett **induktionsbevis** att $a_n = 2^{2^n-1} \cdot 3^{2^n}$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

Lösning:

Vi skall visa påståendet $P(n) : a_n = 2^{2^n-1} \cdot 3^{2^n}$ för $n \in \mathbb{N}$.

Bas: $VL_0 = a_0 = 3$, $HL_0 = 2^{2^0-1} \cdot 3^{2^0} = 2^{1-1} \cdot 3^1 = 3$, så $P(0)$ är sann.

Steg: Låt $i \in \mathbb{N}$ och antag $P(i)$, dvs att $a_i = 2^{2^i-1} \cdot 3^{2^i}$.

Då är $VL_{i+1} = a_{i+1} \stackrel{\text{givet}}{=} 2a_i^2 \stackrel{\text{antaget}}{=} 2(2^{2^i-1} \cdot 3^{2^i})^2 = 2^{2 \cdot 2^i - 2 + 1} \cdot 3^{2 \cdot 2^i} = 2^{2^{i+1}-1} \cdot 3^{2^{i+1}} = HL_{i+1}$, dvs $P(i+1)$, och vi har visat att $P(i) \Rightarrow P(i+1)$ för alla $i \in \mathbb{N}$, **steget är klart.**

Induktionsprincipen ger nu att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar.**