

**Svar och lösningsförslag till ks5, 14 maj 2009,
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om de plana graferna G_1 och G_2 är isomorfa och G_1 har en yta (fasett) med 6 kanter, måste G_2 också ha det. [Nej. Isomorfa grafer kan ritas plana på olika sätt.]		×
b) Om grafen G är hamiltonsk , dvs den har en hamiltoncykel, måste G vara sammanhängande . [Ja, hamiltoncykeln ger en stig mellan godtyckliga hörn.]	×	
c) Ett spännande träd för en graf $G = (V, E)$ är en sammanhängande graf $T = (V, E')$ utan cykler, där $E' \subseteq E$. [Ja, acyklisk och sammanhängande graf är detsamma som träd.]	×	
d) För varje plan graf G är den duala grafen $G^\perp$ sammanhängande. [Ja, mellan varje par av G 's ytor går en kurva som korsar G 's kanter.]	×	
e) Om det kromatiska talet $\chi(G)$ för grafen G uppfyller $\chi(G) \leq 4$, måste G vara planär. [Nej, t.ex. $K_{3,3}$ är icke-planär och $\chi(K_{3,3}) = 2 \leq 4$.]		×
f) Om M_1 och M_2 är olika maximala matchningar i en bipartit graf G , kan $M_1 \cup M_2$ inte vara en matchning. [Stämmer. $M_1 \neq M_2$, $ M_1 = M_2 $ ger $ M_1 \cup M_2 > M_{1,2} $.]	×	

2a) (1p) För vilka värden på de naturliga talen $p, q \geq 1$ har den fullständiga bipartita grafen $K_{p,q}$ en **eulerkrets**?

Lösning:

$K_{p,q}$ är sammanhängande, så eulerkrets finns omm alla valenser (q, p) är jämna.

Svar: En eulerkrets finns precis om p och q båda är jämna tal.

b) (1p) Grafen G fås genom att ta bort en kant, men inget hörn, från den fullständiga grafen K_7 . Vad är dess **kromatiska polynom** $P_G(\lambda)$?

Lösning:

$G \simeq K_7 - e$, $K_7/e \simeq K_6$, så rekursionsformeln för kromatiska polynom ger $P_G(\lambda) = P_{K_7}(\lambda) - P_{K_6}(\lambda) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-6) + \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-5)$ och

Svar: $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)^2$.

Alternativt: Alla utom ett berövat hörn bildar en K_6 . Då övriga färgats, finns $\lambda-5$ färger för det.

Ytterligare alternativ: Som i Ö10:3 med $G_{1,2} \simeq K_6$ klistrade längs en K_5 .

c) (1p) Formulera **Halls sats** om fullständiga matchningar i bipartita grafer ("giftermålssatsen").

Ange tydligt vad beteckningar som används i formuleringen står för.

Du behöver inte bevisa satsen.

Lösning:

Se kursboken DMF, sid 243.

3) (3p) Graferna G_1 och G_2 beskrivs av följande grannstabeller:

G_1 :	$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ d & d & e & a & b & a \\ f & e & f & b & c & b \\ f & & & & c & \end{array}$	G_2 :	$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & & 6 & & & \end{array}$	Är G_1 och G_2 isomorfa ? Om de är det, ange en isomorfi mellan dem. Om de inte är det, visa det.
---------	--	---------	--	---

Lösning:

Graferna kan ritas som var sin sexhörning med olika diagonaler. De är inte isomorfa, ty G_1 är bipartit ($X = \{a, b, c\}$, $Y = \{d, e, f\}$) och det är inte G_2 (hörnen 1, 3, 6 är parvis grannar).

Svar: Nej, G_1 och G_2 är inte isomorfa.

4) (3p) En 4-reguljär, plan och sammanhängande graf delar in planet i 18 ytor (fasetter). Hur många hörn (noder) har grafen?

Lösning:

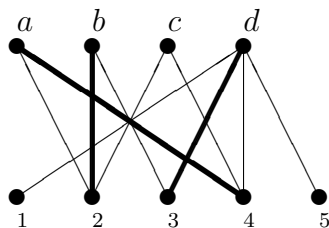
Låt grafen ha v hörn, e kanter och $r (= 18)$ ytor.

$\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$ ger $4v = 2e$, så $e = 2v$

Eulers polyederformel $v - e + r = 2$ ger då $-v + r = 2$, dvs $v = r - 2 = 16$.

Svar: Den har 16 hörn.

5) (3p) I figuren är en matchning M för den bipartita grafen G markerad med feta kanter.



Ange (som en följd av hörn) en **utökande alternerande stig** för M och markera tydligt i nedanstående figur den större matchning M' som kan skapas från M med hjälp av stigen.

Lösning:

Man finner fyra olika utökande alternerande stigar (dvs alternerande stigar som startar och slutar i omatchade hörn) som startar i c :

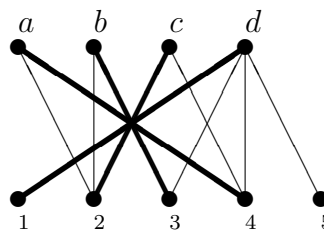
$c2b3d1$

$c2b3d5$

$c4a2b3d1$

$c4a2b3d5$.

Den första ger den nya matchningen härintill.



Svar: En utökande alternerande stig är $c2b3d1$.

Som ovan finns flera korrekta svar.