

**Svar och lösningsförslag till ks3, 30 mars 2009,
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om G_1 , G_2 och G_3 är grupper och $G_1 \approx G_2$, $G_2 \approx G_3$, så måste också $G_1 \approx G_3$. ($\approx$ betecknar gruppisomorfi.) [Ja. Gruppisomorfi är en transitiv relation.]	×	
b) Om g, h i en grupp G uppfyller $gh = 1$ (identitets-elementet i G), måste också $hg = 1$. [Ja, $gh = 1 \Rightarrow hg = g^{-1}ghg = g^{-1}1g = 1$.]	×	
c) $G_{\square}$, symmetrigruppen för en kvadrat, är isomorf med S_4 , gruppen av permutationer av $\{1, 2, 3, 4\}$. [Nej, den är isomorf med en äkta delgrupp till S_4 .]		×
d) Om $\pi, \sigma \in S_n$ är av samma typ , dvs har lika många i -cykler (alla i), måste också $\pi\sigma$ vara av denna typ. [Nej, inte alls. $\pi = \sigma = (1\ 2)$ ger $\pi\sigma = (1)$, av annan typ.]		×
e) Om $(F, +, \cdot)$ är en kropp och $a, b, c \in F$, $a \neq 0$, finns precis ett $x \in F$ med $a \cdot x + b = c$. [Ja, $x = a^{-1} \cdot (c + (-b))$ är enda lösningen till ekvationen.]	×	
f) Permutationerna $(1\ 6\ 4)(2\ 5\ 3)$ och $(1\ 2)(5\ 6)(3\ 4)$ är konjugerade element i S_6 . [Nej. De är ju av olika typ.]		×

2a) (1p) Låt G vara en ändlig grupp, dvs $|G| < \infty$, och $g \in G$.
Vilket värde skall $o(g)$, g 's ordning, ha för att g skall **generera** G , dvs för att $G = \langle g \rangle$?

Lösning:

För att $G = \langle g \rangle$ måste g ha $|G|$ stycken olika potenser. $o(g) \mid |G|$, så $o(g) \leq |G|$.
Svar: $o(g)$ skall vara $= |G|$.

b) (1p) Vad betyder det att en grupp $(G, *)$ är **abelsk**?

Lösning:

En abelsk grupp är detsamma som en kommutativ grupp.
Svar: Att $g * h = h * g$ för alla $g, h \in G$.

c) (1p) Ange för var och en av de tre permutationerna (i S_9) nedan om den är en **jämn** eller en **udda** permutation. I tvåradsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 5 & 7 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 4 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Permutationerna i cykelform:
 $(1\ 8\ 2\ 4\ 5\ 7)(3\ 6\ 9)$, $(1\ 6)(2\ 7\ 4)(3\ 9\ 8\ 5)$, $(1\ 5)(2)(3\ 9)(4)(6)(7\ 8)$.
Pariteten ges av pariteten för antalet cykler av jämn längd (1, 2 och 3).
Svar: De är respektive udda, jämn och udda.

3) Låt G vara gruppen $(U(\mathbb{Z}_{21}), \cdot)$, dvs de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{21}$, med operationen multiplikation.

a) (1p) Ange alla element i G .

Lösning:

$x \in \mathbb{Z}_{21}$ är inverterbart precis om $\text{sgd}(x, 21) = 1$, så

Svar: G 's element är 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20.

b) (2p) Avgör om G genereras av elementet 2.

Lösning:

$2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = (32 \equiv) 11, 2^6 = (22 \equiv) 1$, så $o(g) = 6 < 12 = |G|$. **Svar: Nej, G genereras inte av elementet 2.**

4) (3p) I grupptabellen för gruppen $(G, *)$ finns två rader enligt nedan.

Fyll i de tomma positionerna (markerade -).

Ledning:

Kan man avgöra vilket element som är identitets-element i G ? Vad är $a * c$?

Kom ihåg att motivera din lösning.

$*$	a	b	c	d	f	g
a	b	-	-	c	-	-
b	-	b	-	-	-	-

Lösning:

Eftersom $b * b = b = b * 1$ är $b = 1$, identitets-elementet. Detta ger andra raden och att $a * b = a$.
 $a * c = a * (a * d) = (a * a) * d = b * d = d$. Alla element förekommer exakt en gång i varje rad och i varje kolumn i grupptabellen, så $a * f = g$ och $a * g = f$. Det ger tabellen:

$*$	a	b	c	d	f	g
a	b	a	d	c	g	f
b	a	b	c	d	f	g

5) Låt H vara en delgrupp till S_7 (gruppen av alla permutationer av $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) med $\pi, \sigma \in H$, där (på tvåradsform)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) (1p) Finn på cykelform π, σ och $\pi\sigma$.

Lösning:

$\pi(1) = 4, \pi(4) = 7$ etc ger $\pi = (1\ 4\ 7\ 3\ 5)(2\ 6)$ och pss $\sigma = (2\ 3)(4\ 5\ 7)$.

I $\pi\sigma$ verkar först σ , sedan π . Man finner $\pi\sigma = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$.

Svar: $\pi = (1\ 4\ 7\ 3\ 5)(2\ 6), \sigma = (2\ 3)(4\ 5\ 7), \pi\sigma = (1\ 4)(2\ 5\ 3\ 6)$.

b) (1p) Visa att $|H| \geq 60$, dvs att antalet element i H är minst 60.

Lösning:

$h \in H$ ger $o(h) \mid |H|$. $o(\pi) = \text{mgm}(5, 2) = 10$, pss $o(\sigma) = 6, o(\pi\sigma) = 4$. Så $\text{mgm}(10, 6, 4) = 60 \mid |H| (> 0)$, så $|H| \geq 60$, saken är klar.

c) (1p) Visa att $|H| \geq 420$.

Lösning:

H innehåller en permutation med en 7-cykel: $\pi\tau$, där $\tau = (ab)$, a, b i olika cykler i π . $\tau = \sigma^3 = (2\ 3)$ går bra, $\pi\sigma^3 = (1\ 4\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5)$, $o(\pi\sigma^3) = 7$, så $\text{mgm}(60, 7) = 420 \mid |H|$ och $|H| \geq 420$, saken är klar.