

**Svar och lösningsförslag till ks2, 2 mars 2009,
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) För godtyckliga mängder A och B gäller $ A \cup B = A + B $. [Nej. Bara om A och B är disjunkta, $A \cap B = \emptyset$.]		×
b) Antalet injektioner från en n -mängd till en k -mängd är $k! \cdot S(n, k)$. [Nej, det är antalet surjektioner .]		×
c) Multinomialtalet $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$, då $k_i \in \mathbb{N}$ och $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$. [Nej, $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ skall det vara.]		×
d) Enligt postfacksprincipen finns om $\infty > N > M $ ingen injektion $f: N \rightarrow M$. [Ja, det stämmer.]	×	
e) Antalet funktioner från en n -mängd till en k -mängd är (för alla $n, k \in \mathbb{N}$) n^k . [Nej, men k^n .]		×
f) Om de ingående mängderna är disjunkta, uttrycker principen om inklusion och exklusion detsamma som additionsprincipen . [Ja faktiskt.]	×	

2a) (1p) Låt n och k vara positiva heltal. Hur många olika uppsättningar icke-negativa heltal $x_1, x_2, \dots, x_k$ med $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ finns det?
Svaret får innehålla heltal, de fyra räknesätten och fakulteter.

Lösning:

Detta är en formulering av urvalsfallet "oordnat urval med upprepning" (x_i är antalet gånger i valts). Om talen x_i representeras av x_i st kulor, svarar varje lösning mot att bestämma vilka $k - 1$ av $n + k - 1$ positioner som skall vara väggar mellan på varandra följande x_i . Antalet är $\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}$, så

Svar: $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}$ stycken.

b) (1p) Mängden A har 17 element, B har 10 och C har 9.
6 element ligger i både A och B och 4 i både A och C , medan inga element ligger i både B och C .
Hur många element har mängden $A \cup B \cup C$?

Lösning:

Principen om inklusion och exklusion ger $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C| = 17 + 10 + 9 - (6 + 0 + 4) + 0 = 26$.

Svar: $A \cup B \cup C$ har 26 element.

c) (1p) Ange en rekursionsformel och begynnelsevillkor ("basfall") för att bestämma stirlingtalen (av andra slaget, dvs de som behandlats i kursen).

Svar:

$$\begin{cases} S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k), & 1 < k < n \\ S(n, 1) = S(n, n) = 1, & 1 \leq n \end{cases}.$$

3) (3p) Vid en lotteridragning finns 10 kulor, märkta '0', '1', ..., '9', i en apparat. Slumpvis (likafördelat) matas en kula ut. Efter att man noterat dess märkning, läggs den tillbaks. Därefter görs på samma sätt ytterligare fyra dragningar.

Vad är sannolikheten att det bland de 5 dragna kulorna varken finns två (eller fler) med samma märkning eller någon märkt '0'?

Svaret får innehålla heltal och de fyra räknesätten.

Lösning:

Eftersom varje kula dras med samma sannolikhet har vi likafördelning och den sökta sannolikheten är antalet sätt att dra fem olika och '0'-skilda kulor ($= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ sätt (multiplikationsprincipen, 9 möjligheter för första (inte '0'), 8 för den andra (inte '0', inte som första) etc.)) dividerat med det totala antalet sätt att dra de fem kulorna (10^5 sätt (multiplikationsprincipen igen)), så

Svar: Den sökta sannolikheten är $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} (= 0,1512)$.

4) (3p) 10 barn skall ställas upp på ett led.

På hur många sätt kan det ske, om barnen Birgit och Bertil inte får stå intill varandra?

Svaret får innehålla heltal och de fyra vanliga räknesätten.

Lösning:

Det totala antalet sätt att ställa upp dem på ett led är $10!$. Från dem skall dras antalet uppställningar där Birgit och Bertil står intill varandra, $2 \cdot 9!$ (B eller B först av dem, sedan som 9 personer). Det sökta antalet är alltså $10! - 2 \cdot 9! = (10 - 2) 9! = 8 \cdot 9!$. (Alternativt: Ställ upp Birgit och de andra 8 barnen ($9!$ sätt), Bertil kan placeras in på 8 olika sätt).

Svar: På $8 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 (= 2903040)$ olika sätt.

5) (3p) På hur många sätt kan mängden X , med 26 element, delas upp i fyra disjunkta delar A_1, A_2, A_3, A_4 (dvs $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ och $A_i \cap A_j = \emptyset$ om $i \neq j$), så att antalet element i A_1 och A_2 tillsammans är 17 och antalet element i A_1 och A_3 tillsammans är 12 ($|A_1 \cup A_2| = 17$ och $|A_1 \cup A_3| = 12$)?

Svaret får innehålla heltal, de fyra räknesätten och fakulteter.

Lösning:

En sådan fördelning svarar precis mot att välja två delmängder, $M = A_1 \cup A_2$ och $N = A_1 \cup A_3$, till X med 17 respektive 12 element.

Dessa M och N bestäms tydligen entydigt av A_i :na. Omvänt bestämmer M och N entydigt (de disjunkta) A_i :na, $A_1 = M \cap N$, $A_2 = M \setminus N$, $A_3 = N \setminus M$ och $A_4 = (M \cup N)^c$.

Det handlar då om antalet sätt att oberoende välja ut M med $|M| = 17$ och N med $|N| = 12$, vilket (multiplikationsprincipen) är $\binom{26}{17} \cdot \binom{26}{12} = \frac{26!}{17! \cdot 9!} \cdot \frac{26!}{12! \cdot 14!}$, så

Svar: De kan fördelas på $\frac{26! \cdot 26!}{17! \cdot 14! \cdot 12! \cdot 9!} (= 30175966535000)$ sätt.