

**Svar och lösningsförslag till ks1, 10 februari 2009,
i SF1610 Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Med talen skrivna i bas 3 gäller att $122 \cdot 21 = 11102$. [Ja. Räkna i bas 3, eller se att det är $17 \cdot 7 = 119$.]	×	
b) För alla $m, n \in \mathbb{Z}$ är $\text{sgd}(m, n) = \text{sgd}(m, n^2)$. [Nej, $\text{sgd}(4, 2) = 2 \neq \text{sgd}(4, 2^2) = 4$.]		×
c) Om $a, b \in \mathbb{Z}$ uppfyller $a \nmid b$ och $b \nmid a$ så finns $m, n \in \mathbb{Z}$ med $am + bn = 1$. [Nej, $am + bn = 1$ betyder att $\text{sgd}(a, b) = 1$, men $6 \nmid 10$, $10 \nmid 6$, $\text{sgd}(6, 10) = 2 \neq 1$.]		×
d) Mängden av alla primtal är överuppräknligt oändlig. [Nejdå, primtalen kan räknas upp i ordning, $p_1 = 2$, $p_2 = 3, \dots$]		×
e) För alla mängder A, B, C : $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$. [Ja, Venn diagram eller se att $V \setminus A = (B \cup C)$ och $B \setminus C \subseteq B \cup C$.]	×	
f) Om X är en mängd och $f : X \rightarrow X$, är relationen som f definierar ($a \mathcal{R} b$ precis om $b = f(a)$) transitiv bara om $f(x) = x$ för alla $x \in X$. [Nej. Det räcker att $f(f(x)) = f(x)$.]		×

2a) (1p) Ange vilka av följande element i $\mathbb{Z}_{150}$ som är inverterbara och vilka som inte är det, 1, 2, 14, 22, 27, 39, 49, 82, 91, 123.

Lösning:

$r \in \mathbb{Z}_{150}$ är inverterbart om $\text{sgd}(r, 150) = 1$, dvs $2, 3, 5 \nmid r$ ($150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$).

Svar: Inverterbara: 1, 49, 91. Inte: 2, 14, 22, 27, 39, 82, 123.

b) (1p) Om $f : Y \rightarrow X$ och $g : X \rightarrow Y$ uppfyller $fg = id_X$ (dvs $(fg)(x) = x$ för alla $x \in X$), måste då f vara **en injektion**?

Lösning:

Svar: Nej Motex.: $X = \{a\}$, $Y = \{0, 1\}$, $g(a) = 0$, $f(0) = f(1) = a$ ger $fg = id_X$ ($(fg)(a) = f(g(a)) = f(1) = a$), men f inte injektiv ($f(0) = f(1)$).

c) (1p) I figuren visas en (graf för en) relation.

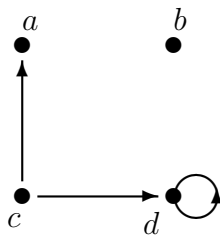
Lägg till **så få nya pilar som möjligt**, så att den relation grafen sedan beskriver är **en ekvivalensrelation**.

Lösning:

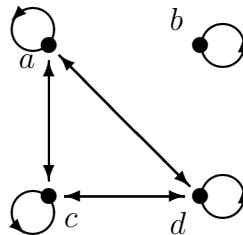
Reflexiviteten ger tre öglor vid a, b, c . Symmetrin ger två pilar (ac och dc). Transitiviteten så en dubbelpil (ad och da).

Sedan kontrollerar man att den uppkomna relationen är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

Given:



Ekvivalensrelationen:



3) (3p) Avgör (med motivering förstås) om det finns heltal x, y som uppfyller

$$119x + 91y = 14724.$$

(Det krävs inte att du löser ekvationen, även om det skulle finnas lösningar.)

Lösning:

Ekvationen $ax + by = c$ har heltalslösningar om $\text{sgd}(a, b) \mid c$.

Euklides algoritmen: $119 = 1 \cdot 91 + 28$, $91 = 3 \cdot 28 + 7$, $28 = 4 \cdot 7 + 0$, så $\text{sgd}(119, 91) = 7$. Men $14724 = 2000 \cdot 7 + 724 = 2100 \cdot 7 + 24 = 2103 \cdot 7 + 3$, så $7 \nmid 14724$ och alltså

Svar: Det finns inga sådana heltal x och y .

4) (3p) Finn $a, b \in \mathbb{Z}_{60}$ så att ekvationen $ax = b$ i $\mathbb{Z}_{60}$ har precis 10 olika lösningar.

Lösning:

$ax = b$ i $\mathbb{Z}_m$ har $d = \text{sgd}(a, m)$ olika lösningar om $d \mid b$, annars ingen. Vi kan ta $a = 10$, $b = 0$. Alla möjligheter: $a = 10, 50$ och $b = 0, 10, 20, 30, 40, 50$.

Alternativt: $x = 6k$, $k \in \mathbb{N}$ ger precis 10 olika tal i $\mathbb{Z}_{60}$. Men det är detsamma som $10x = 60k$, dvs $10x = 0$ i $\mathbb{Z}_{60}$.

Svar: En möjlighet är $a = 10$, $b = 0$.

5) (3p) Låt $k \neq 1$ och definiera talföljden $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ enligt

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + k^{n+1}, \quad \text{för alla } n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Visa med ett **induktionsbevis** att

$$a_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \dots$$

Lösning:

Vi skall visa påståendet $P(n) : a_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$ för $n \in \mathbb{N}$.

Bas: $VL_0 = a_0 = 1$, $HL_0 = \frac{k^1 - 1}{k - 1} = 1$, så $P(0)$ är sann.

Steg: Låt $i \in \mathbb{N}$ och antag $P(i)$, dvs att $a_i = \frac{k^{i+1} - 1}{k - 1}$.

Då är $VL_{i+1} = a_{i+1} = a_i + k^{i+1} = VL_i + k^{i+1} \stackrel{\text{ind.ant.}}{=} HL_i + k^{i+1} = \frac{k^{i+1} - 1}{k - 1} + k^{i+1} = \frac{(k^{i+1} - 1) + (k^{i+2} - k^{i+1})}{k - 1} = \frac{k^{i+2} - 1}{k - 1} = HL_{i+1}$, dvs $P(i + 1)$, och vi har visat att $P(i) \Rightarrow P(i + 1)$ för alla $i \in \mathbb{N}$, **steget är klart**.

Induktionsprincipen ger nu att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar**.