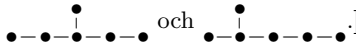
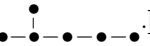


**Svar och lösningsförslag till ks5, 23 april 2008,  
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (På a)–f) ger rätt svar  $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar  $-\frac{1}{2}$ p.

Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | sant | falskt |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|--------|
| a) Om två <b>träd</b> för varje $k(= 0, 1, 2, \dots)$ har lika många hörn (noder) av valens (grad) $k$ , är de säkert isomorfa.<br>[Nej. Motex.  och  .] |      | ×      |
| b) Om en graf har ett udda antal kanter, måste antalet komponenter också vara udda.<br>[Nej, inte alls. Ex grafen  har 1 kant och 2 komponenter.]                                                                                         |      | ×      |
| c) En eulerkrets i en graf kan inte också vara en hamiltoncykel. [Jo, i cykelgraferna $C_n$ .]                                                                                                                                                                                                                             |      | ×      |
| d) Den fullständiga bipartita grafen $K_{4,3}$ är inte planär.<br>[Rätt, den innehåller den icke-planära $K_{3,3}$ .]                                                                                                                                                                                                      | ×    |        |
| e) Om grafen $G$ är planär och har det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ , så gäller $P_G(\lambda) > 0$ för $\lambda = 4, 5, 6, \dots$ .<br>[Ja, fyrfärgssatsen.]                                                                                                                                                        | ×    |        |
| f) För en icke-maximal matchning i en bipartit graf finns säkert en <b>utökande alternerande stig</b> . [Ja, DMF s. 249.]                                                                                                                                                                                                  | ×    |        |

2a) (1p) Hur många komponenter har en graf med följande granntabell?

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |     | $a$ | $b$ | $a$ |
| $f$ | $g$ | $g$ | $h$ |     |     | $c$ | $d$ |
|     |     |     | $h$ |     |     |     |     |

**Lösning:**

Man finner att komponenterna har hörnen  $\{a, d, f, h\}$ ,  $\{b, c, g\}$  och  $\{e\}$  (inga kanter mellan mängderna, men vägar mellan alla element i mängderna).

**Svar: Tre komponenter.**

b) (1p) Den fullständiga grafen med 8 hörn (noder),  $K_8$ , har precis en av eulerkrets och hamiltoncykel. Vilkendera?

**Lösning:**

Alla hörn har udda valens, så ingen eulerkrets, men varje cyklisk ordning av hörnen ger en hamiltoncykel i  $K_8$ .

**Svar: Den har en hamiltoncykel, men ingen eulerkrets.**

c) (1p) En viss sammanhängande graf innehåller precis en cykel. Hur många kanter har grafen, om den har 26 hörn (noder)?

**Lösning:**

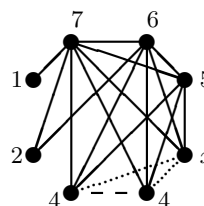
Tas en kant bort ur cykeln, återstår ett träd (en sammanhängande graf utan cykler) med 26 hörn. Det har  $26 - 1 = 25$  kanter. Med det borttagna fås

**Svar: Grafen har 26 kanter.**

3) (3p) I en graf  $G$  har de åtta hörnen (noderna) valenserna (graderna) 1, 2, 4, 4, 5, 6, 7,  $x$ . Vilka värden är möjliga för  $x$ ?  
(Fler poäng ges ju fler värden som (med korrekt motivering) utesluts och ju fler som (korrekt) visats vara möjliga.)

### Lösning:

Hörnet med valens 7 har kanter till alla andra hörn. En graf med de givna valenserna finns tydligen omm det finns en graf med (7 hörn och) valenser 0, 1, 3, 3, 4, 5,  $x - 1$ , dvs omm det finns en med valenser 1, 3, 3, 4, 5,  $x - 1$ . Här har hörnet med valens 5 kanter till alla andra hörn, så grafen finns omm det finns en med valenser 0, 2, 2, 3,  $x - 2$ , dvs omm det finns en (ändra av- och ...) med 2, 2, 3,  $x - 2$ . Hörnet med valens 3 har kanter till alla andra, så den finns omm en finns med valenser 1, 1,  $x - 3$ . Här finns två möjligheter, 1-hörnen kan vara förbundna med varandra (så  $x = 3$ ) eller med det tredje (så  $x = 5$ ). Genom att "sätta tillbaka" de borttagna hörnen får man de två möjliga graferna i fig.



**Svar: De möjliga värdena är  $x = 3$  och  $x = 5$ .**

[Direkt kunde man se att bara  $x = 1, 3, 5, 7$  var tänkbara, ty summan av valenserna är jämn.  $x = 1$  och  $x = 7$  kan ganska lätt uteslutas.]

4) (3p) En plan graf består av tre komponenter. I hur många ytor (regioner, fasetter) delar den in planet (inklusive den obegränsade ytan), om antalet hörn (noder) är 22 och antalet kanter är 36?

### Lösning:

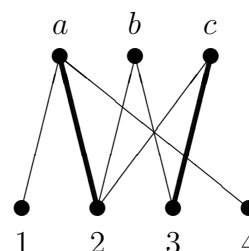
Med vanliga beteckningar har vi  $v = 22$ ,  $e = 36$ ,  $c = 3$  och söker  $r$ .

Enligt Eulers formel gäller  $v - e + r - c = 1$ , så  $r = 18$ .

[Om man bara minns formeln för sammanhängande grafer, kan man förbinda komponenterna med två extra kanter och lika många ytor och hörn.]

**Svar: Planet delas in i 18 ytor.**

5) (3p) I vidstående bipartita graf är matchningen  $\{a2, c3\}$  markerad med tjockare kanter. Ange en **utökande alternerande stig** för matchningen och ge också den fullständiga matchning som fås med hjälp av stigen.



### Lösning:

Utökande alternerande stigar (dvs alternerande stigar som börjar och slutar i omatchade hörn) är  $b2a1$ ,  $b2a4$ ,  $b3c2a1$  och  $b3c2a4$ . De ger matchningarna  $\{a1, b2, c3\}$ ,  $\{a4, b2, c3\}$ ,  $\{a1, b3, c2\}$  och  $\{a4, b3, c2\}$ .

**Svar: Stigar  $b2a1$ ,  $b2a4$ ,  $b3c2a1$ ,  $b3c2a4$  och motsvarande matchningar  $\{a1, b2, c3\}$ ,  $\{a4, b2, c3\}$ ,  $\{a1, b3, c2\}$ ,  $\{a4, b3, c2\}$ .**

Ett alternativ räcker förstås som svar.