

**Svar och lösningsförslag till ks2, 27 februari 2008,
i SF1610(/5B1118) Diskret matematik för CL**

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Händelserna A och B kallas oberoende om $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. [Nej. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ skall det vara.]		×
b) Om X är en ändlig mängd, finns det precis $2^{ X }$ icke-tomma delmängder till X . [Nej, $\emptyset$ skall vara med.]		×
c) Med postfacksprincipen kan man visa att det bland 13 personer finns två som fyller år i samma månad. [Ja.]	×	
d) Antalet injektioner från $\{a, b, c, d\}$ till $\{1, 2, 3\}$ är $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. [Nej, eftersom $4 > 3$ är antalet 0.]		×
e) Stirlingtalet $S(n, k)$ ger antalet sätt att fördela n identiska objekt i k särskiljbara lådor, så att ingen låda blir tom. [Nej, tvärtom. Särskiljbara objekt, identiska lådor.]		×
f) Om p är ett primtal och $0 < k < p$ gäller $p \mid \binom{p}{k}$, dvs $\binom{p}{k}$ är delbart med p . [Ja. $p \mid p!$, $p \nmid k!$, $p \nmid (p-k)!$.]	×	

2a) (1p) Hur många olika ord kan man få genom att kasta om bokstäverna i ordet ABRAKADABRA?

Svaret får innehålla heltal och de fyra räknesätten.

Lösning:

Antalet ges av multinomialtalet
 $\binom{11}{5,2,1,1,2} = \frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 (= 83160)$, ty bland de 11 positionerna skall väljas 5 positioner för A:na, 2 för B:na, 1 för D:et, 1 för K:et, 2 för R:en. **Svar: $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 (= 83160)$ stycken.**

b) (1p) Ange ett uttryck som ger binomialtalet $\binom{n}{k}$ ($0 < k < n$) med hjälp av vissa binomialtal $\binom{n'}{k'}$ med $n' < n$.

Lösning:

Det handlar om den vanliga rekursionsformeln för binomialtalen (som kan visas kombinatoriskt genom att dela upp k -delmängderna i dem som inte innehåller ett visst x_0 från n -mängden och dem som gör det, men det krävs inte här).

Svar: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

c) (1p) Hur många **surjektioner** från $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ till $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ finns det?

Lösning:

Det finns $3! \cdot S(5, 3) = 6 \cdot 25 = 150$ stycken.
 (Se delen av "Stirlings triangel" till höger.)

Svar: 150 stycken

		1		
	1		1	
1		3		1
	7		6	
		25		

3) (3p) Hur många heltal n med $10000 \leq n \leq 99999$ (dvs femsiffriga tal (i bas 10)) har **inte** alla siffror olika (fortfarande i bas 10), dvs de har minst två siffror som är lika?

Svaret får innehålla heltal och de fyra räknesätten.

Lösning:

Det sökta antalet är (totala antalet femsiffriga tal) – (antalet **med** alla siffror olika) $= 9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 90000 - 27216 = 62784$. (Additions- och multiplikationsprinciperna. Den första siffran kan väljas på 9 sätt (inte 0, ju), sedan den andra på 10 respektive 9 sätt, etc.)

Svar: Det sökta antalet är $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 (= 62784)$.

4) (3p) En kurs läses av 42 studenter.

Hur många olika tentaresultat kan det bli, om man bara intresserar sig för statistiken (dvs hur många, inte vilka, som fått varje resultat) och de möjliga resultaten för varje student är A, B, C, D, E, F och "–" (inte gått upp)?

Svaret får innehålla heltal och de fyra vanliga räknesätten.

Lösning:

42 "icke-särskiljbara" studenter skall fördelas på de 7 olika resultaten.

Det kan ses som att man placerar in 6 "skiljeväggar" mellan studenterna, vilket kan ske på $\binom{42+6}{6} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 \cdot 43 (= 12271512)$ sätt.

Svar: $47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 \cdot 43 (= 12271512)$ olika resultat är möjliga.

5) (3p) Bland Lisas och Pelles böcker finns 46 st med våldsamma inslag (eng. action), 88 st med inslag av kärlek (eng. sex) och 49 st med matematiska inslag (eng. mathematics). Totalt har 149 böcker minst ett av dessa inslag och bara 3 st alla tre. Vidare har 7 st inslag både av matematik och våld och 19 st av både kärlek och våld.

Hur många av deras böcker innehåller både matematik och kärlek, men inget våld?

Lösning:

Kalla mängden böcker med kärleksinslag K , med matematik M , med våld V .

Givet är att $|K \cup M \cup V| = 149$, $|K| = 88$, $|M| = 49$, $|V| = 46$,

$|K \cap V| = 19$, $|M \cap V| = 7$, $|K \cap M \cap V| = 3$.

Principen om inklusion och exklusion ger att

$|K \cup M \cup V| = |K| + |M| + |V| - |K \cap M| - |K \cap V| - |M \cap V| + |K \cap M \cap V|$,

så $149 = 88 + 49 + 46 - |K \cap M| - 19 - 7 + 3$, så $|K \cap M| = 11$ och det sökta antalet $|(K \cap M) \setminus V| = |K \cap M| - |K \cap M \cap V| = 11 - 3 = 8$.

Svar: Det finns 8 sådana böcker.