

Svar och lösningsförslag till övningsks 5.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$ p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$ p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

	sant	falskt
a) Om G_1 och G_2 är isomorfa grafer så har G_1 och G_2 samma antal hörn och samma antal kanter. [Ja, hörn motsvarar hörn med samma antal kanter.]	×	
b) Varje träd är en planär graf. [Ja, visas med induktion (tag i steget bort ett löv).]	×	
c) Varje graf har (minst) ett spännande träd. [Nej, inte säkert. Grafen måste vara sammanhängande.]		×
d) Om, i en sammanhängande graf, alla hörn har jämn valens så finns minst en eulerkrets. [Ja, (Euler).]	×	
e) En fullständig bipartit graf har alltid en hamiltoncykel. [Nej, inte om $ X \neq Y $.]		×
f) Det kromatiska talet $\chi(C_n)$ för cykelgrafen C_n är $= 2$ för alla $n = 3, 4, \dots$. [Nej, det är $= 2$ om n är jämnt, $= 3$ om n är udda.]		×

2a) (1p) Bestäm antalet kanter i en graf som har 12 hörn, varav sex har valensen (graden) 5 och sex har valensen (graden) 1.

Lösning:

Summan av alla valenser är dubbla antalet kanter,

$\sum_{v \in V} \delta(v) = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 36 = 2|E|$, så **svar: Antalet kanter är 18.**

b) (1p) Graferna G_1 och G_2 , med vidstående grannstabeller, är isomorfa. Ange en isomorfi mellan graferna.

1	2	3	4	resp	a	b	c	d
2	3	4	3		b	a	b	c
3	1	1				c	d	b
		2					d	

Lösning:

Isomorfin φ parar ihop hörn med samma valens, så $\varphi(4) = a, \varphi(3) = b$. Övriga hörn är båda grannar med valens-3-hörnet och varandra så man kan ta $\varphi(1) = c, \varphi(2) = d$ eller $\varphi(2) = c, \varphi(1) = d$.

**Svar: Isomorfin ges av $\varphi(1) = c, \varphi(2) = d, \varphi(3) = b, \varphi(4) = a$
eller av $\varphi(1) = d, \varphi(2) = c, \varphi(3) = b, \varphi(4) = a$.**

c) (1p) En planär sammanhängande graf G har 16 hörn och 18 kanter. Hur många ytor har en plan ritning av grafen, om ytan utanför grafen räknas med?

Lösning:

Eulers polyederformel ger (med v st hörn, e st kanter och r st ytor) $v - e + r = 2$. Vi har $v = 16$ och $e = 18$ och söker r . Vi får $r = 2 - 16 + 18 = 4$.

Svar: 4 ytor

3) (3p) Bestäm antalet spännande träd till grafen med granntabellen:

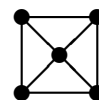
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	1	7	3	2	1	2
2		7	8	5	8	6	5	4
3			4	6	5	4	4	
4				3	2	1	2	
5					3	2	1	
6						3	2	
7							3	
8								4

Lösning:

Om man ritar grafen, ser man att det handlar om den cykliska grafen med 8 hörn (och 8 kanter). Ett spännande träd uppstår precis om man tar bort en kant i den enda cykeln, dvs vilken som helst av kanterna.

Svar: Det finns 8 stycken olika spännande träd till grafen.

4) (3p) Finn det kromatiska polynomet $P_G(\lambda)$ för grafen G :
Ge svaret som en produkt av enkla faktorer.



Lösning:

Genom att använda rekursionsformeln för kromatiska polynom får man (tag bort den nedersta, horisontella kanten i G) att $P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) - P_{G_2}(\lambda)$, där:



$P_{G_1}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3$, ty den vänstra triangeln kan färgas på $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ sätt och sedan de andra två hörnen på vardera $\lambda-2$ sätt.

$G_2 \simeq K_4$, så $P_{G_2}(\lambda) = P_{K_4}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

Det ger $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-2)^2 - (\lambda-3)) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2 - 5\lambda + 7)$.

Svar: G 's kromatiska polynom är $P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+7)$.

5) (3p) Grafen G har precis en cykel. Antalet hörn (noder) i G är 126 och antalet kanter är 125. Hur många komponenter består G av?

Lösning:

Om man tar bort en kant i cykeln, fås en graf med 126 hörn, 124 kanter och lika många komponenter som G . I den är alltså varje komponent ett träd (så grafen är en skog) och har antalet hörn ett mer än antalet kanter. Totalt finns 2 hörn mer än antalet kanter, så det finns 2 komponenter

Svar: Antalet komponenter i G är 2.