Matematik, KTH
B.Ek

SF1662, Diskret matematik för
CLGYM1, CELTE2/3
vt 2017

Övningsks 2.

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)
Kryssa för om påståendena **a)**–**f)** är sanna eller falska (eller avstå)!

		sant	**falskt**
a)	Endast om $B \subseteq A$ så gäller att $B \cap A = A$.		
b)	Om en funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ är både en injektion och en surjektion är den säkert inverterbar.		
c)	$(A \setminus B)^c = B^c \setminus A^c$ gäller för alla mängder A och B.		
d)	En anti-symmetrisk relation är alltid reflexiv, men inte säkert tvärtom.		
e)	Om f är en injektiv funktion från mängden A till mängden B och $\|A\| = \|B\| < \infty$ så är f bijektiv.		
f)	De rationella talen är en uppräkneligt oändlig mängd.		

2a) (1p) Låt $\mathcal{P}(A)$ beteckna mängden av alla delmängder till en mängd A. Bestäm antalet element i

$$\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}).$$

b) (1p) Låt $p \vdash q$ betyda att q kan härledas från p med naturlig deduktion. Om $p\mathcal{R}q$ betyder att $p \vdash q$ eller $q \vdash p$ (eller båda), vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri , antisymmetri och transitivitet har relationen $\mathcal{R}$?

c) (1p) Ange en bijektiv funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där $\mathbb{R}$ betecknar de reella talen.

3) (3p) Låt relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vara sann för $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ precis om det finns en surjektion $f : A \to B$.
Är relationen $\mathcal{R}$ reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv?
Glöm inte att motivera dina svar.

4) (3p) Visa med naturlig deduktion att

$$\neg B \vdash (A \to B) \to \neg A.$$

Följande deduktionsregler får användas:

Regel för antagande

$$\begin{array}{cclll} j & (\mathrm{j}) & p & & \text{antagande} \end{array}$$

Regel för $\to$ E:

$$\begin{array}{rclll}
a_1, \ldots, a_m & (\mathrm{j}) & p \to q & & \\
 & \vdots & & & \\
b_1, \ldots, b_n & (\mathrm{k}) & p & & \\
 & \vdots & & & \\
a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n & (\mathrm{l}) & q & \mathrm{j,k} & \to \mathrm{E}
\end{array}$$

Regel för $\neg$ E:

$$\begin{array}{rclll}
a_1, \ldots, a_m & (\mathrm{j}) & \neg p & & \\
 & \vdots & & & \\
b_1, \ldots, b_n & (\mathrm{k}) & p & & \\
 & \vdots & & & \\
a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n & (\mathrm{l}) & \bot & \mathrm{j,k} & \neg \mathrm{E}
\end{array}$$

DN-regeln

$$\begin{array}{rclll}
a_1, \ldots, a_n & (\mathrm{j}) & \neg\neg p & & \\
 & \vdots & & & \\
a_1, \ldots, a_n & (\mathrm{k}) & p & \mathrm{j} & \mathrm{DN}
\end{array}$$

Regel för $\to$ I:

$$\begin{array}{rclll}
\mathrm{j} & (\mathrm{j}) & p & \text{antagande} & \\
 & \vdots & & & \\
a_1, \ldots, a_n & (\mathrm{k}) & q & & \\
 & \vdots & & & \\
\{a_1, \ldots, a_n\}/j & (\mathrm{l}) & p \to q & \mathrm{j,k} & \to \mathrm{I}
\end{array}$$

Regel för $\neg$ I:

$$\begin{array}{rclll}
\mathrm{j} & (\mathrm{j}) & p & \text{antagande} & \\
 & \vdots & & & \\
a_1, \ldots, a_n & (\mathrm{k}) & \bot & & \\
 & \vdots & & & \\
\{a_1, \ldots, a_n\}/j & (\mathrm{l}) & \neg p & \mathrm{j,k} & \neg \mathrm{I}
\end{array}$$

5) (3p) Använd induktion för att visa att formeln

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{gäller för alla } n = 1, 2, 3, \ldots$$