

Svar till övning 11, den 4 maj 2017

1. Med n hörn i grafen är möjliga valenser $0, 1, \dots, n-1$, men 0 och $n-1$ kan inte båda förekomma om $n \neq 1$. Postfacksprincipen.

2. **Nej.** Den vänstra är inte bipartit (a, b, c alla grannar), men det är den högra (inga grannar av samma paritet).

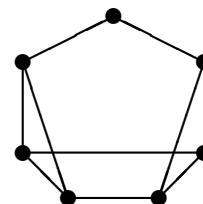
3. Småkubernas grannförhållanden beskrivs av en bipartit graf, där mittkuben är av minoritetstyp.

4. i) $0, 2, 3, 3, 4, 4, 5$: omöjligt, ty summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal.

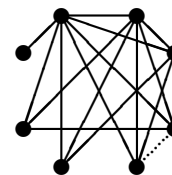
ii) $2, 3, 3, 3, 3, 3, 3$: möjligt, se figuren till höger.

iii) $2, 2, 3, 5, 5, 5, 6$: omöjligt, ty de tre första hörnen kan ha högst 7 kanter till de sista fyra, men dessa måste ha minst 9 kanter till de första tre (minst $2, 2, 2, 3$ "utåt").

5. T.ex. kubgrafen (hörn och kanter i en kub) och två stycken K_4 (som en graf).



6. Låt hörnens valenser vara $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x$. Summan av valenserna skall vara 2 gånger antalet kanter, ett jämnt tal, så x är udda och ≤ 7 . $x = 1$ är omöjligt, ty hörnen med valenser $6, 7$ medför att det går minst 3 kanter till varje par av hörn. $x = 7$ är också omöjligt, ty två hörn med valens 7 skulle innebära att alla hörn hade valens minst 2. $x = 3, 5$ går båda, se fig. (utan och med den prickade kanten). Ett sätt att finna dessa är att notera att en graf med valenser $1, 3, 3, 4, 5, 6, 7, x$ finns omm en med valenser $0, 2, 2, 3, 4, 5, x-1$ finns omm en med $1, 1, 2, 3, x-2$ finns omm en med $1, 2, 2, x-2$ finns etc.



7. En möjlighet är dessa grafer (boken ger andra i övning 6.39).

a.



b.



c.



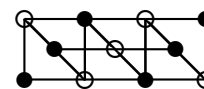
d.



8a. Om rutorna är omväxlande svarta och vita (som på ett vanligt schackbräde) leder varje drag från svart till vit eller från vit till svart. Eftersom den skall återkomma till startrutan måste det finnas lika många svarta som vita rutor (om den gör minst ett drag), dvs totalt ett jämnt antal.

b*. Antag att det finnes en sådan sluten väg (dvs en hamiltoncykel). Färga nu rutorna i rad 1 och 4 röda och de i rad 2 och 3 blå. Då kan springaren aldrig gå från röd till röd och eftersom brädet har lika många av varje färg, måste varannan ruta den besöker vara blå och varannan röd. Men detsamma gäller för de svarta och vita rutorna i den vanliga färgningen (som i a.). Det betyder att alla röda rutor vore vita eller alla svarta. Motsägelse.

9. Enligt figuren är grafen bipartit. Eftersom den har ett udda antal hörn kan den inte ha någon hamiltoncykel (en sådan måste ha vartannat svart och vitt hörn, dvs lika många av vardera), så **svaret är nej**.



10. Om grafen $G = (V, E)$ är osammanhängande, finns disjunkta $V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ med $V = V_1 \cup V_2$ och inga kanter mellan dem. Om $x \in V_1, y \in V_2$, gäller $\delta(x) \leq |V_1| - 1, \delta(y) \leq |V_2| - 1$, så $\delta(x) + \delta(y) \leq |V_1| + |V_2| - 2 = n - 2$.
11. Om den bipartita grafen $G = (X \cup Y, E)$ har $|X| = k, |Y| = n - k$ gäller att $\delta(x) \leq n - k$ för $x \in X$, så (i alla kanter ingår precis ett $x \in X$) antalet kanter $e \leq k(n - k) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$.
- 12a. $\bar{\delta}_i = v - 1 - \delta_i$, $i = 1 \dots v$. b. Direkt ur a.
- c. De är komplementgrafer till 2-reguljära grafer med 8 hörn. Det finns bara 3 sådana: C_8 , $C_5 + C_3$, $C_4 + C_4$. (Där C_n är cykelgraferna, dvs 2-reguljära och sammanhängande grafer med n hörn.)
13. Följer av att $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.
14. Eftersom $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot 28 = 56$ och alla $\delta(v) \geq 3$, måste $|V| \leq 18$. En graf med 18 hörn och 28 kanter ges av två kopior av kubgrafen med två disjunkta kanters mittpunkter "hopsnörda" till ett nytt hörn.
15. Om hörnen x, y ligger i olika komponenter i G , är xy en väg i $\bar{G}$. Om de ligger i samma komponent och z ligger i en annan, är xzy en väg i $\bar{G}$.
16. Det finns 11 stycken olika.
17. Grafen är en skog, så varje komponent är ett träd (sammanhängande och acyklisk) och har därför 1 hörn mer än kanter. Med n komponenter blir det n fler hörn, så antalet komponenter är 43.
18. Rita (om man t.ex. ritar K_4 som en tetraeder uppifrån, kan det femte hörnet var det än placeras förbindas med 3 hörn).
19. $v - e + r = 2$ (Euler) och $4v = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2e = 2 \cdot 16$, så $r = 2 - v + e = 2 - 8 + 16 = 10$.
20. Låt en plan version av grafen ha r ytor. Då gäller (G är sammanhängande och inte ett träd, så kanterna kring varje yta innehåller alla kanter i minst en cykel och är alltså minst k st) $v - e + r = 2$ och $kr \leq 2e$, så $2 \leq v - e + \frac{2}{k}e = v - \frac{k-2}{k}e$, som ger $e \leq \frac{k}{k-2}(v - 2)$.
- Petersens graf har $v = 10$, $e = 15$ och $k = 5$. (Den blir inte planär ens om man tar bort en kant, eller om man tar bort ett hörn och dess kanter.)
- Om man tar bort hörn a och dess kanter och suddar ut b, e, f (och gör deras två kanter till en) är den uppkomna grafen bipartit, med hörnmängder $X = \{c, i, j\}$ och $Y = \{d, g, h\}$. Alla hörn i X är grannar med alla i Y , så grafen är isomorf med $K_{3,3}$. Kuratowskis sats ger att Petersens graf inte är planär.
- Om man kontraherar kanterna af, bg, ch, di, ej fås en graf som är isomorf med K_5 . Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär.
- Eftersom suddandet av ett hörn kan uppfattas som en kontraktion av en kant, kan samma konstruktion som ovan också användas för att visa att Wagners sats ger att Petersens graf inte är planär. Däremot kan man inte få K_5 för Kuratowskis sats (eftersom operationerna där inte kan öka valensen för ett hörn).
21. 12 hörn och 11 ytor ger $e = 12 + 11 - 2 = 21$ kanter. Låt det finnas x hörn med valens 3 (så $12 - x$ hörn med valens 5). Då fås $3x + 5(12 - x) = 2e = 42$, så $x = 9$. Alltså 9 hörn med valens 3 och 3 hörn med valens 5.
22. Låt x, y vara antalen ytor med 4 respektive 6 kanter. Då gäller $v - e + (x + y) = 2$ och $3v = 2e = 4x + 6y$. De ger $x = 6$, medan v, e och y inte bestäms entydigt. Det finns alltså 6 ytor med 4 kanter.