

Exempel för övning 9, den 6 april 2017

1. $(U(\mathbb{Z}_{64}), \cdot)$ är en grupp. Visa att varje element g i den satisfierar $g^{32} = 1$.
2. Minns att den **direkta produkten** av två grupper $(G_1, *_1)$ och $(G_2, *_2)$ definieras som gruppen $(G_1 \times G_2, \circ)$ där för $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$:

$$(g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2).$$

- a. Låt $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ ha ordningar $o(g_i) = m_i$.
Vad är ordningen för $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$?
 - b. För vilka $m, n \in \mathbb{Z}_+$ är $(\mathbb{Z}_m, +) \times (\mathbb{Z}_n, +) \approx (\mathbb{Z}_{mn}, +)$?
 - c. Gäller för alla grupper G_1 och G_2 att $G_1 \times G_2 \approx G_2 \times G_1$?
 - d. Om H_1, H_2 är delgrupper till G_1 respektive G_2 , måste $H_1 \times H_2$ vara en delgrupp till $G_1 \times G_2$?
 - e. Visa att G_1 är isomorf med en **normal** delgrupp till $G_1 \times G_2$.
3. En given grupp G har delgrupper H och K med 39 respektive 40 element. Bestäm m , det minsta möjliga värdet för $|G|$.
Konstruera också en grupp G med m element som har delgrupper med 39 resp. 40 element.

4. Visa att vidstående tabell inte kan fyllas i så att den blir en grupptabell.

*	a	b	c	d	f	g	h	i	k
a	a	b							
b	b	a							
c									
d									
f									
g									
h									
i									
k									

5. Låt G vara S_4 , gruppen av permutationer av $\{1, 2, 3, 4\}$, och $N \subset G$ ges av (med elementen i cykelform) $N = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.
 - a. Kalla hörnen i en regelbunden tetraeder för 1, 2, 3, 4. Elementen i G svarar då mot stela (dvs avståndsbevarande) avbildningar av rummet, vilka lämnar tetraedern invariant men permuterar hörnen.
Ange för varje konjugatklass i G hurdana avbildningar dess element motsvarar.
 - b. Vilken typ av avbildning motsvarar jämna respektive udda permutationer i G ?
 - c. Visa att N är en **normal** delgrupp till G och beskriv kvotgruppen G/N (dvs ange en känd grupp som är isomorf med G/N).
6. Låt $f(x) = x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ och $t(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.
Finn $b_2(x), b_1(x), b_0(x) \in \mathbb{Q}[x]$ sådana att $f(x) = b_2(x)(t(x))^2 + b_1(x)t(x) + b_0(x)$.

7. Skriv följande gaussiska heltal som produkter av gaussiska primtal:

$$2 + i, 3 + i, 4 + i, 5, 7, 4 + 3i, 15, 7 - i, 8 + i.$$

8. Bestäm $\text{sgd}(21 + 37i, 26 + 12i)$ (i de gaussiska heltalen, $\mathbb{Z}[i]$) och finn $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ sådana att $\text{sgd}(21 + 37i, 26 + 12i) = \alpha(21 + 37i) + \beta(26 + 12i)$.

9*. Finns det andra sätt (än 1,2,3,4,5,6 på båda) att fördela ögonen på två tärningar, så att sannolikheten för varje totalt antal ögon blir samma som för vanliga tärningar (dvs det skall gå att få totalt 4 på 3 sätt, att få totalt 11 på 2 sätt osv)? Om det går, beskriv alla möjligheter.

Tärningarna skall ha normal kubisk form och antalet ögon på varje sida skall vara ett positivt heltal.

10*. Givet fyra linjer i planet, inga två parallella och inga tre genom samma punkt.

Längs varje linje kryper en lus, var och en med sin konstanta hastighet. Visa att om två löss möts (utan att stanna upp) vid fem av linjernas skärningspunkter, så möts också två löss vid den sjätte skärningspunkten.