

Svar till övning 8, den 28 mars 2017

1. $ac = c = 1c$, så a är identitets-elementet.

Det ger första raden och första kolumnen.

Sedan används att tabellen är en latinsk kvadrat (dvs varje element finns precis en gång i varje rad och kolumn). Tabellen blir:

a. Nej b. a

c. $a^{-1}=a$, $b^{-1}=b$, $c^{-1}=c$, $d^{-1}=d$,

$f^{-1}=g$, $g^{-1}=f$

d. Ordningarna är $o(a)=1$, $o(b)=o(c)=o(d)=2$, $o(f)=o(g)=3$ e. c

2a. $ax^2 = b$ ger $ax^3 = bx$, så (med $x^3 = 1$) $a = bx$ och $x = b^{-1}a$

b. $bx = (xax)^3 = xax^2ax^2ax = xa(xa)^{-1}(xa)^{-1}x = (xa)^{-1}x$
(ty $x^2a = (xa)^{-1}$), så $b = (xa)^{-1}$ och $xa = b^{-1}$ och $x = b^{-1}a^{-1} (= (ab)^{-1})$.

c. $bac = a^{-1}$ ger $ba = a^{-1}b$, så $aca = b^{-1}$, $acab = 1$, $cab = a^{-1}$.

d. $(abc)^{-1} = abc$ ger $abcabc = 1$, så $bcabc = a^{-1}$, $bcabca = 1$, $(bca)^{-1} = bca$.

e. $a^3 = 1$ ger $a = 1a = a^3a = (a^2)^2$.

f. $b^2ab = a^{-1}$ ger $ba = b^{-1}a^{-1}b^{-1}$, så $(ba)^3 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}baba = 1a = a$.

(Alt. $b^2ab = a^{-1}$ ger $b^2aba = 1$, så $babab = b^{-1}b^2abab = 1$ och $(ba)^3 = a$.)

3. $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot) = (\{1, 3, 5, 7\}, \cdot)$ är **inte** cyklisk, ty $o(1)=1$, $o(3)=o(5)=o(7)=2$,
 $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot) = (\{1, 3, 5, 9, 11, 13\}, \cdot) = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$ är cyklisk.

4. Man finner ordningarna:

π	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$o(\pi)$	1	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2

,

så generatorerna (elementen med $o(g) = |G|$) är 2, 6, 7, 11.

(Vi kommer snart att se att för en grupp av ordning 12 är alla element g med $g^4, g^6 \neq 1$ generatorer. Det förenklar sökandet.)

5a. $G_1 = (\mathbb{Z}_8, +)$:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$G_2 = (U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$:

$\cdot$	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

b. Grupper av ordning 8, så element kan ha ordning 1, 2, 4 och 8. Man finner för G_1 : $o(0) = 1$, $o(4) = 2$, $o(2) = o(6) = 4$, $o(1) = o(3) = o(5) = o(7) = 8$, för G_2 : $o(1) = 1$, $o(4) = o(11) = o(14) = 2$, $o(2) = o(7) = o(8) = o(13) = 4$.

c. Cykliska delgrupper genereras av elementen,

i G_1 : $\langle 0 \rangle = \{0\}$ med sidoklasser $\{g\}$, $g \in G_1$;

$\langle 4 \rangle = \{0, 4\}$ med $\{0, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 7\}$;

$\langle 2 \rangle = \langle 6 \rangle = \{0, 2, 4, 6\}$ med $\{0, 2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$;

$\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = G_1$ med G_1 som enda sidoklass.

i G_2 : $\langle 1 \rangle = \{1\}$ med sidoklasser $\{g\}$, $g \in G_2$;

$\langle 4 \rangle = \{1, 4\}$ med $\{1, 4\}$, $\{2, 8\}$, $\{7, 13\}$, $\{11, 14\}$;

$\langle 11 \rangle = \{1, 11\}$ med $\{1, 11\}$, $\{2, 7\}$, $\{4, 14\}$, $\{8, 13\}$;

$\langle 14 \rangle = \{1, 14\}$ med $\{1, 14\}$, $\{2, 13\}$, $\{4, 11\}$, $\{7, 8\}$;

$\langle 2 \rangle = \langle 8 \rangle = \{1, 2, 4, 8\}$ med $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{7, 11, 13, 14\}$;

$\langle 7 \rangle = \langle 13 \rangle = \{1, 4, 7, 13\}$ med $\{1, 4, 7, 13\}$, $\{2, 8, 11, 14\}$.

d. En (del)grupp H är cyklisk om det finns $h \in H$ med $o(h) = |H|$.

Alla delgrupper av ordning 1 och 2 är cykliska, så de enda möjliga icke-cykliska delgrupperna är av ordning 4, med alla element av ordning 1 eller 2, eller av ordning 8 (dvs hela gruppen), om inget element har ordning 8. Utöver dem i

c. finner man delgrupperna,

i G_1 : inga andra,

i G_2 : $\{1, 4, 11, 14\}$ med sidoklasser $\{1, 4, 11, 14\}$, $\{2, 7, 8, 13\}$;

G_2 med G_2 som enda sidoklass.

e. G_1 är cyklisk, men inte G_2 .