

Exempel för övning 6, den 23 februari 2017

1. Hur många olika utfall är möjliga när man slår med n st likadana tärningar?
2. Vi betraktar ord av längd 5 i alfabetet $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, dvs femsiffriga tal som eventuellt kan inledas med en eller flera 0:or.
 - a. Hur många sådana ord finns det?
 - b. Hur många av dem har strikt växande siffror?
 - c. Hur många av dem har växande (inte säkert strikt) siffror?
 - d. Hur många av dem har växande eller avtagande (ingendera säkert strikt) siffror?
3. Givet 12 olika tvåsiffriga tal. Visa att minst två av dem har en skillnad av form aa (i bas 10).
4. Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ vara heltal. Visa att det finns en icke-tom delmängd av dem, vars summa är delbar med n .
5. På en cirkels periferi ligger n olika punkter $P_1, P_2, \dots, P_n$. Man drar alla "diagonalerna" $P_i P_j$ mellan punkterna. Hur många skärningspunkter mellan dessa finns det inne i cirkeln, om det aldrig går tre diagonaler genom samma punkt?
- 6*. Låt $k > 0$ vara ett naturligt tal. Visa att det finns ett $n > 0$, sådant att $k \mid F_n$, där F_n är fibonaccitalet nr n , som vanligt definierat av
$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & \text{alla } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$
7. Hur många omkastningar av A, B, D, G, J, U som varken innehåller DU eller JAG finns det?
8. Finn arean för en sfärisk triangel med vinklarna α, β, γ på en sfär med radie R . En sfärisk triangel har delar av tre storcirklar som sidor och en sfär med radie R har arean $4\pi R^2$.
9. I en familj bestående av 4 personer förekommer alla de sju dödssynderna (högmod, girighet, vällust, avund, frosseri, vrede och lättja). Varje person hemfaller tyvärr åt minst en av synderna, men dessbättre förekommer ingen av synderna hos mer än en av dem.
 - a. På hur många sätt kan synderna vara fördelade?
 - b. Hur många fördelningar är möjliga om ingen hemfaller åt både girighet och lättja?

10. På hur många sätt kan 7 kulor fördelas på 4 lådor i följande fall?

- a. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma.
- b. Särskiljbara kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma.
- c. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får vara tomma.
- d. Identiska kulor, särskiljbara lådor, lådor får inte vara tomma.
- e. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får vara tomma.
- f. Särskiljbara kulor, identiska lådor, lådor får inte vara tomma.

11. Visa att för stirlingtal (av andra slaget) gäller

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \quad \text{och} \quad S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

12.** Vilka siffror är de 100:e decimalerna i $(\sqrt{2}+1)^{1000}$ respektive $(\sqrt{2}+1)^{1001}$?

13.** Av en cirkulär tårta, med (choklad)brun ovansida och (tårtbottens)vit undersida, skärs bitar med medelpunktsvinkel x intill varandra. Då en bit skurits, vänds den genast upp och ner och läggs in på sin gamla plats (där den på magiskt vis växer fast igen). Detta upprepas runt, runt tårtan.

Låt $nx < 2\pi < (n+1)x$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Efter $k \leq n$ vändningar är tårtans ovansida alltså vit på en sektor med vinkel kx , resten brun. Efter $n+1$ vändningar är den vit, bortsett från en mindre brun sektor (som vänts två gånger).

- a. Kommer tårtan(s ovansida) någonsin att bli helt vit? I så fall, efter hur många vändningar?
- b. Kommer tårtan(s ovansida) någonsin att bli helt brun igen? I så fall, efter hur många vändningar?