Matematik, KTH
B.Ek

SF1662, Diskret matematik för CLGYM1, CELTE2/3
vt 2017

Svar till övning 4, den 10 februari 2017

1. $\mathcal{R}$ är inte reflexiv, ty $(d,d) \notin \mathcal{R}$.
$\mathcal{R}$ är inte symmetrisk, ty $(a,b) \in \mathcal{R}$, $(b,a) \notin \mathcal{R}$.
$\mathcal{R}$ är inte anti-symmetrisk, ty $(c,d) \in \mathcal{R}$, $(d,c) \in \mathcal{R}$, men $c \neq d$.
$\mathcal{R}$ är inte heller transitiv, ty $(d,c) \in \mathcal{R}$, $(c,d) \in \mathcal{R}$, men $(d,d) \notin \mathcal{R}$.

2. Alla mängder människor där ingen syskonskara är tvåkönad.

3. Minimala exempel:
$\mathcal{R}_a = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$,
$\mathcal{R}_b = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$,
$\mathcal{R}_c = \varnothing$.

4. $\subseteq$ är en partialordning (dvs reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv) på varje mängd av mängder, här på $X = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.
$\{1\}$ och $\{2\}$ är minimala element, det finns inget minsta element.
$\{1,2,3\}$ är största element och (därmed) enda maximalt element.

5. Om $\mathcal{R}$ är både symmetrisk och antisymmetrisk gäller att $a\mathcal{R}b \Rightarrow a = b$. Om $\mathcal{R}$ är reflexiv gäller $a = b \Rightarrow a\mathcal{R}b$. Å andra sidan är likhetsrelationen en ekvivalensrelation och en partialordning. Så $\mathcal{R}$ är likhetsrelationen på A, med mängden av ekvivalensklasser $\{\{a\} \mid a \in A\}$.

6a. Ingendera, b. bara injektiv, c. bara surjektiv, d. alla fyra.

7. Man finner värdena:

a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3+3x+7	7	2	3	7	2	3	7	2	3,

så detta f har ingen av egenskaperna.

b.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3+4x+5	5	1	3	8	4	6	2	7	0,

så detta f har alla fyra egenskaperna.

c.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3+5x+4	4	1	4	1	7	1	7	4	7,

så detta f har ingen av egenskaperna.

8. Eftersom $\text{sgd}(1632, 4711) = 1$ är 1632 inverterbar i $\mathbb{Z}_{4711}$, så f är inverterbar ($f^{-1}(x) = 1632^{-1}(x - 1792)$) och därmed bijektiv, vilket medför att den också är injektiv och surjektiv.

9. $f(x) = x^2 + 1721x + 1066 = x^2 + (1721 + 4711)x + 1066 = x^2 + 2 \cdot 3216x + 3216^2 - 3216^2 + 1066 = (x + 3216)^2 - 3216^2 + 1066$, så $f(4711 - 3216 + 1) = f(4711 - 3216 - 1)$ och f är inte injektiv. Den är alltså ($\mathbb{Z}_{4711}$ är ändlig) inte heller surjektiv, bijektiv (= injektiv och surjektiv) eller inverterbar (= bijektiv).

10. Minsta exemplet: $|X| = |Z| = 1,\ |Y| = 2,\ f, g$ godtyckliga funktioner.
Med mängderna lika: $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1, g(x) = max(x - 1, 0)$.
(Om gf är injektiv måste f vara injektiv och om gf är surjektiv måste g vara surjektiv. I det sökta exemplet kan f alltså inte vara surjektiv och g inte injektiv (ingen av dem skall ju vara bijektiv).)

11. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2$, så f är injektiv.
Varje $x = f(f(x))$, så f är surjektiv. f är injektiv och surjektiv, så bijektiv.
(Eller $ff = id_A$ betyder att $f = f^{-1}$, f har en invers, så f är bijektiv.)

12a. Nej, ty eftersom $\mathbb{Q}$ är uppräknelig och $\mathbb{R}$ är överuppräknelig finns ingen injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ (och ingen surjektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$),
b. ja, t.ex. $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.