

Exempel för övning 4, den 10 februari 2017

1. Den binära relationen $\mathcal{R}$ på mängden $X = \{a, b, c, d\}$ ges av

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c)\}.$$

Avgör om $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv.

2. För vilka mängder av människor gäller att relationen "är syster till" är symmetrisk?

3. Låt $X = \{a, b, c, d\}$ och ge exempel på en relation på X som är

- a. reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv,
- b. reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk,
- c. symmetrisk och transitiv, men inte reflexiv.

4. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $X = \{B \subseteq A \mid 1 \in B \text{ eller } 2 \in B \text{ (eller båda)}\}$.

Visa att relationen $\subseteq$ på X är en partialordning. Finn alla minimala, minsta, maximala och största element i X med denna ordning.

5. Låt A vara en mängd och beskriv alla relationer på A som både är ekvivalensrelationer och partialordningar. Vilka är ekvivalensklasserna?

6. Avgör om sambandet $f(x) = x^2$ definierar en injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar funktion i följande fall

- a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ b. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, c. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ d. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ betecknar här de icke-negativa reella talen $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

7. Är $f : \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9$ injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar då

- a. $f(x) = x^3 + 3x + 7$, b. $f(x) = x^3 + 4x + 5$, c. $f(x) = x^3 + 5x + 4$?

8. Avgör om $f : \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$, $f(x) = 1632x + 1792$ är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.

9. Avgör om $f : \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$, $f(x) = x^2 + 1721x + 1066$ är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.

10. Ge exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, sådana att sammansättningen $gf : X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det.

Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att $X = Y = Z$.

11. Låt A vara en mängd och $f : A \rightarrow A$ en funktion sådan att $ff = id_A$, dvs $f(f(x)) = x$ för alla $x \in A$. Visa att f är en bijektion.

- 12a. Finns det $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ och $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, sådana att $gf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en bijektion?

- b. Finns det $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, sådana att $gf : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ är en bijektion?

- 13**. Två fyrar blinkar med intervall α respektive β (minuter). α och β är irrationella tal sådana att $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ (dvs i medeltal kommer ett blink per minut). Visa att om de båda blinkar vid tiden $t = 0$ kommer det under "heltalsminuten" mellan $n - 1$ och n precis ett blink, för alla heltal $n > 1$.