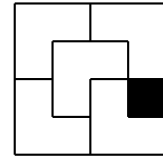


Exempel för övning 3, den 3 februari 2017

1. Visa, t.ex. med induktion, att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. En kvadrat med sida 1024 är uppdelad i 1024×1024 rutor med sida 1. Visa att om man tar bort en av dessa rutor, kan resten av kvadraten täckas av "L-formade" bitar med 3 rutor.



I figuren visas ett möjligt fall för en kvadrat med sida 4.

3. Minns **fibonaccitalen** F_n : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

- a. Visa att $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = \sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$ för alla $n = 0, 1, 2, \dots$

- b. Visa att $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

4. Låt följderna $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ definieras rekursivt av

$$\begin{cases} a_0 = 5, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Visa att $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$ för alla $n = 0, 1, \dots$

5. Visa med naturlig deduktion (reglerna finns i stencilen "Lite om bevis")

- a. $A \wedge B, A \rightarrow C, B \rightarrow D \vdash C \wedge D$,
- b. $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B \vdash C$,
- c. $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$,
- d. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$,
- e. $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$,
- f. $\neg(A \wedge \neg B) \vdash A \rightarrow B$,
- g. $A, \neg A \vdash B$,
- h. $(A \vee B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$,
- i. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A$,
- j. $\vdash \neg \perp$.

6. Mängderna A, B, C ges av $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$, $C = \{1, 2, 4\}$.

Ange mängderna $A \cup B$, $B \cap C$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(C)$, $C \times B$.

Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska:

$C \subseteq A \cap B$, $C \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$, $C \times B \subseteq A \times B$. Motivera.

7. Visa, dels med räkneregler på sidan 20 i läroboken (den första) och dels med ett Venndiagram, att för godtyckliga mängder A, B gäller

$$((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = A.$$

Minns att $M \setminus N$ kan uttryckas som $M \cap N^c$.

8. Gäller för alla mängder A och B att

$$A^c \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A?$$

Motivera.

9. Vad är $|\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})|$?

Vad är $|\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})|$?

Ange alla element i $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ och i $\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})$.

10*. Finns det någon mängd C så att för alla mängder A och B gäller

$$(A \in B \text{ och } B \in C) \Rightarrow A \in C?$$

Förklara varför ingen finns eller ge minst tre exempel.

11.** Visa för fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ att $\text{sgd}(F_m, F_n) = F_{\text{sgd}(m,n)}$.