

Svar till övning 12, den 13 maj 2015

1. Kalla hörnen $000, 001, \dots, 111$ (xyz-koordinater för hörnen). Grannar är hörn vars koordinater skiljer i precis en position. Grafen är bipartit och en 2-färgning får man genom att ordna hörnen så att alla (utom det första) är granne med något tidigare, t.ex. $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$. För att få fler färger tar man ordningar som ger fel färg till det andra hörnet etc.
3-färgning med t.ex. $000, 111, 001, 010, 011, 100, 101, 110$ och
4-färgning med t.ex. $000, 111, 001, 110, 010, 011, 100, 101$.
- 2*. Betrakta alla färgningar av hörnen i G med två färger. Bland dem finns en med det minsta antalet "kollisioner" (dvs enfärgade kanter). En sådan färgning löser problemet, ty om ett hörn hade samma färg som mer än hälften av sina grannar, skulle det bli färre kollisioner om det bytte färg.
- 3*. Låt i en minimal färgning av G n_i st hörn ha färg $i = 1, \dots, \chi(G)$. Alla hörn som har samma färg i G måste ha olika färg i $\overline{G}$, så $n_i \leq \chi(\overline{G})$, alla i . Därmed $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{\chi(G)} \leq \chi(\overline{G}) + \dots + \chi(\overline{G}) = \chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$.
4. Kalla hörnen (i ordning) $1, 2, 3, 4, 5$. 1 kan färgas på λ sätt. För vart och ett av dessa fås två fall, om 2 och 5 har samma eller olika färger. I det senare fallet kan 3 ha samma färg som 5 eller inte. Man får $P_G(\lambda) = \lambda((\lambda-1)^2(\lambda-2) + (\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1) + (\lambda-2)^2)) = \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda-1)^5 - (\lambda-1)$. Med rekursionsformeln, $P_{C_5}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - P_{C_4}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - (P_{T_4}(\lambda) - P_{C_3}(\lambda)) = \lambda(\lambda-1)^4 - \lambda(\lambda-1)^3 + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)((\lambda-1)^2 + 1)$. (T_n är ett träd med n hörn.)
5. Att de två högstgradstermerna är $\lambda^n - |E|\lambda^{n-1}$ visas med rekursionsformeln för $P_G(\lambda)$ och induktion över antalet kanter.
6. För var och en av de $P_{G_1}(\lambda)$ st färgningarna av G_1 finns det $\frac{P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}$ färgningar av G_2 som fortsätter den. $P_{G_2}(\lambda)$ är ju nämligen $\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) \cdot (\text{antalet sätt färga } G_2 \text{ med givna (olika) färger för hörnen i } V_1 \cap V_2)$.
 $P_G(\lambda) = \frac{P_{C_3}(\lambda)^3}{\lambda \cdot \lambda(\lambda-1)} = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$. (Fås också med kombinatoriskt resonemang.)
7. T.ex. $\{a_1b_2, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_4, a_5b_3\}$.
8. Utgående från a_5 finner man de utökande alternerande stigarna $a_5b_3a_1b_2$, $a_5b_4a_4b_2$ och $a_5b_4a_4b_1a_2b_2$. De leder alla till större, dvs fullständiga, matchningar. Den första ger den fullständiga matchningen i svaret till förra uppgiften.
9. Utgående från a_1 finner man tre olika utökande alternerande stigar, den kortaste är $a_1b_3a_3b_5$ och den längsta är en hamiltonstig från a_1 till b_5 . Den kortaste ger den fullständiga matchningen $\{a_1b_3, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_2, a_5b_4\}$.

10. Tydligen måste den andra mängden representeras av 2, så den fjärde av 4 osv. Man får (entydigt) de olika representanterna (i ordning): 1,2,3,4,5.

Halls sats ger att de senare mängderna saknar transversal, ty unionen av de 3 första, $\{1\} \cup \{1, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3\}$, har bara 2 element.

11. Vi skall visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med elever och böcker som hörn och kanter från elever till de böcker de vill läsa. Från varje delmängd A av eleverna med $|A| = m$, går minst mk kanter, alla till $P(A)$. Men om $|P(A)| \leq m - 1$ kan den "ta emot" högst $(m - 1)k$ kanter. Så $|P(A)| \geq m$. Enligt Halls sats finns en fullständig matchning.

12. Det gäller att visa att det finns en fullständig matchning i den bipartita grafen med tentander och uppgifter som hörn och kanter precis då tentanden klarat uppgiften. Tag en delmängd A till tentanderna. Om $A \neq \emptyset$ är $|P(A)| \geq 4$ (varje tentand klarade minst 4 uppgifter) och om $|A| > 4$ är $|P(A)| = 10$ (varje uppgift klarades av minst 6 tentander, så någon i A). Halls sats ger resultatet.

13. Betrakta den bipartita grafen med A_i :na som X -hörn och B_j :na som Y -hörn och en kant mellan A_i och B_j precis om $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Halls sats. En fullständig matchning i den grafen motsvarar en gemensam transversal.