

## Exempel för övning 12, den 13 maj 2015

1. Finn ordningar mellan hörnen i kubgrafen (som har hörn svarande mot kubens hörn och kanter mot dess kanter), så att den giriga algoritmen för att färga hörnen använder 2, 3 respektive 4 färger.

2\*. Låt  $G = (V, E)$  vara en graf. Visa att hörnen i  $V$  kan färgas med högst två färger, så att varje hörn har samma färg som högst hälften av sina grannar.

3\*. Visa att om grafen  $G$  har  $n$  hörn och  $\overline{G}$  är komplementgrafen till  $G$ , så gäller  $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$ .  $\chi(G)$  är förstås det kromatiska talet för  $G$ .

4. Bestäm det kromatiska polynomet  $P_{C_5}(\lambda)$  för den cykliska grafen  $C_5$ , med kombinatoriskt resonemang ("fall för fall") eller med rekursionsformeln för kromatiska polynom. Jämför med det allmänna uttrycket som härleddes på föreläsningen,  $P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$ .

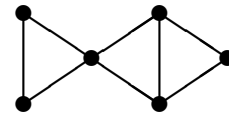
5. Visa att koefficienten för  $\lambda^{n-1}$  i det kromatiska polynomet  $P_G(\lambda)$  är  $-|E|$ .  $n$  är antalet hörn i  $G$ .

6. Låt grafen  $G = (V, E)$  vara graferna  $G_1 = (V_1, E_1)$  och  $G_2 = (V_2, E_2)$  "hopklustrade längs en  $K_m$ ", dvs  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $E = E_1 \cup E_2$  och  $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$  är en graf som är isomorf med den fullständiga grafen  $K_m$ .

Visa att det kromatiska polynomet  $P_G(\lambda)$  ges av

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)}.$$

Illustrera med  $P_G(\lambda)$  för grafen  $G$  här till höger.



7. Finn en fullständig matchning i den bipartita graf som består av hörmängderna  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$  och  $Y = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_5\}$  och kantmängden  $E = \{a_1b_2, a_1b_3, a_2b_1, a_2b_2, a_2b_4, a_3b_3, a_3b_5, a_4b_1, a_4b_2, a_4b_4, a_5b_3, a_5b_4\}$ .

$a_1b_2$  etc står förstås för  $\{a_1, b_2\}$  etc.

8. Betrakta samma bipartita graf som i föregående uppgift. Betrakta matchningen  $M = \{a_1b_3, a_2b_1, a_3b_5, a_4b_4\}$  och finn en alternerande stig till  $M$ . Använd denna alternerande stig till att göra matchningen större.

9. Samma uppgift men med  $M = \{a_2b_1, a_3b_3, a_4b_2, a_5b_4\}$ .

10. Bestäm en **transversal** (i boken kallad "ett system av distinkta representer") till mängderna  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{4, 5\}$  och förklara varför det inte finns någon transversal till mängderna  $\{1\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3, 4, 5\}$ .

**11.** Eleverna i en klass skall låna böcker. Visa att om varje elev vill läsa minst  $k(\geq 1)$  stycken av de tillgängliga böckerna och det för varje bok finns högst  $k$  stycken elever som vill läsa den, så kan varje elev låna en egen bok som den vill läsa.

**12.** Tio tentander har gjort en tentamen med tio uppgifter. Varje uppgift klarades av minst sex skrivande. Varje skrivande klarade minst fyra uppgifter. Visa att man kan fördela uppgifterna med en per tentand, så att var och en har klarat sin uppgift.

**13.** Låt  $\{A_i\}_{i=1}^n$  och  $\{B_i\}_{i=1}^n$  vara två **partitioner** av mängden  $X$  (som vi minns betyder det precis att  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$  och att  $A_i \cap A_j = \emptyset$  om  $i \neq j$ , motsvarande för  $B_j$ :na).

Visa att det finns en **gemensam transversal** (gemensamma distinkta representanter), dvs en mängd  $Y$  med  $|Y| = n$  och  $|Y \cap A_i| = |Y \cap B_i| = 1$  för alla  $i = 1, 2, \dots, n$ , om och endast om det inte för något  $k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , finns  $k$  stycken av  $A_i$ :na som alla är delmängder till unionen av färre än  $k$  av  $B_j$ :na.

**14\*\*.** (Planeras gås igenom sista föreläsningen.) A och B utför en kortkonst på följande sätt. A får fem kort som slumpvis dragits ur en kortlek, tittar på dem, gör en hög av fyra av korten och ger högen till B. B tittar på de fyra korten och talar om vilket det femte kortet är.

Hur bär de sig åt?