

Exempel för övning 11, den 8 maj 2015

1. Visa att om G är en graf med minst två hörn så har minst två av hörnen samma valens.

2. Är graferna som beskrivs av följande grannstabeller isomorfa?

a	b	c	d	e	f		1	2	3	4	5	6
b	a	a	a	b	c	och	2	1	2	3	2	1
c	c	b	e	d	d		4	3	4	5	4	3
d	e	f	f	f	e		6	5	6	1	6	5

3. En kubisk ost består av 27 småkuber ($3 \times 3 \times 3$). En mus som vill äta upp hela osten börjar med att äta en av småkuberna och tar sedan hela tiden en ännu oäten småkub som gränsar till den senaste han ätit. Visa att han inte kan avsluta med mittkuben. Småkuber som förlorat sitt stöd faller konstigt nog inte ner.

4. Avgör (med motivering) i vart och ett av fallen i), ii) och iii) om det finns någon graf med sju hörn med valenser:

i) 0, 2, 3, 3, 4, 4, 5, ii) 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, iii) 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6.

5. Rita två 3-reguljära grafer med åtta hörn.

6. I en graf med åtta hörn har sju av hörnen valenserna 1, 3, 3, 4, 5, 6, 7. Vilka värden är möjliga för det åttonde hörnets valens?

7. Rita fyra grafer som uppfyller nedanstående.

- Grafen är varken hamiltonsk eller eulersk.
- Grafen är eulersk men inte hamiltonsk.
- Grafen är hamiltonsk men inte eulersk.
- Grafen är både hamiltonsk och eulersk.

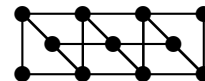
8. Det är i allmänhet svårt att avgöra om en (stor) graf har någon hamiltoncykel (i motsats till att avgöra om den har någon eulerkrets). Detta exempel illustrerar ett sätt (som fungerar ibland) att visa att en graf **inte** har någon hamiltoncykel.

a. Visa att om m och n är udda heltal (inte båda = 1) kan en springare inte i en följd drag besöka alla rutor på ett $m \times n$ -”schackbräde” precis en gång och återkomma till startpunkten. (En springare går i ett drag två rutor framåt och en åt sidan.)

b*. Visa samma sak för ett bräde av format $4 \times n$, n heltal.

9. Har grafen till höger någon hamiltoncykel?

Ge exempel eller förklara varför ingen kan finnas.



10. Visa att om för alla $x, y \in V$, $x \neq y$ i en graf $G = (V, E)$ med $|V| = n$ gäller att

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$$

så är G sammanhängande.

11. Visa att för varje bipartit graf G med n hörn gäller att $e \leq (\frac{n}{2})^2$.
12. Betrakta en graf G med hörnmängden V och kantmängden E . Komplementgrafen $\overline{G}$ till G har samma hörnmängd V som G men $\overline{G}$'s kantmängd består av de kanter som inte finns i E , dvs det går en kant mellan hörnet x och hörnet $y \neq x$ i $\overline{G}$, precis då kant mellan x och y saknas i G .
- a. Antag att G har valenssekvensen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v$. Bestäm valenssekvensen för $\overline{G}$.
- b. Visa att om en graf G med n hörn är k -reguljär så gäller att $\overline{G}$ är $(n-1-k)$ -reguljär.
- c. Bestäm alla 5-reguljära grafer med 8 hörn.
13. Visa att om valensen för alla hörn i grafen $G = (V, E)$ delas av primtalet $p \neq 2$, dvs $p \mid \delta(v)$, för alla $v \in V$, så gäller att talet p delar antalet kanter e , dvs $p \mid |E|$.
14. Hur många hörn kan en graf med 28 kanter ha som mest, om valensen hos varje hörn är minst 3?
15. Visa att om en graf G är osammanhängande så måste komplementgrafen $\overline{G}$ vara sammanhängande.
16. Rita alla (icke-isomorfa) träd med 7 hörn.
17. En acyklisk graf, dvs en graf som saknar cykler, består av 143 hörn och 100 kanter. Hur många komponenter består grafen av?
18. Tas en kant bort från K_5 blir den så erhållna grafen planär. Visa det.
19. Antag att G är en sammanhängande 4-reguljär graf som dessutom är planär. Hur många ytor har en plan ritning av G om G har 16 kanter?
20. Visa att om den planära sammanhängande grafen G har minst en cykel och samtliga cykler har längd minst $k \geq 3$ så gäller att

$$e \leq \frac{k}{k-2}(v-2).$$

Använd sedan detta för att visa att den s k Petersens graf, med grannlista

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	inte är planär.
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e	(Ett åskådligt sätt att rita grafen är som en
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g	femhörning med hörn i ordningen $abcde$ och
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h	innanför dem deras respektive grannar $fghij$
										(som blir spetsar i en inre stjärna).)

Visa också med hjälp av dels Kuratowskis och dels Wagners sats (se planaritetsstencilen) att grafen inte är planär.

21. I en sammanhängande plan graf har alla hörn valens 3 eller 5. Antalet hörn är 12 och antalet ytor är 11. Hur många hörn har valens 3 och hur många har valens 5?
22. I en 3-reguljär, plan, sammanhängande graf har alla ytor antingen 4 eller 6 kanter (också den obegränsade ytan). Hur många ytor har 4 kanter?