

Svar till övning 9, den 17 april 2015

1. $|U(\mathbb{Z}_{64})| = 32$.
- 2a. $(g_1, g_2)^k = (1, 1)$ omm $m_{1,2} \mid k$, så $o((g_1, g_2)) = \text{mgm}(o(g_1), o(g_2))$.
- b. $\mathbb{Z}_{mn}$ är cyklisk (ty $o(1) = mn$) och isomorf med $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ omm det finns $g \in \mathbb{Z}_m$, $h \in \mathbb{Z}_n$ med $\text{mgm}(o(g), o(h)) = mn$, dvs omm $\text{mgm}(m, n) = mn$ (ty $o(g) \mid m$, $o(h) \mid n$, $o(1) = m$ resp. n), dvs $\text{sgd}(m, n) = 1$.
- c. Ja, $\phi((g_1, g_2)) = (g_2, g_1)$ är en isomorfi.
- d. Ja, verifiera att $H_1 \times H_2$ är $\neq \emptyset$, sluten under $\circ$ och $^{-1}$.
- e. $G_1 \times \{1\} = \{(g_1, 1) \mid g_1 \in G_1\}$ är en normal delgrupp till $G_1 \times G_2$.
3. $39, 40 \mid |G|$, så $m = 39 \cdot 40 = 1560$. G kan vara $(\mathbb{Z}_{1560}, +)$.
4. a vore identitets-elementet, så $o(b)$ vore 2. Omöjligt, ty $|G|$ är udda.
- 5a. Rotationsaxlar och speglingsplan nedan går genom tetraederns tyngdpunkt.

Typ	Antal	Paritet	Exempel	Stel avbildning av rummet
$[1^4]$	1	jämn	$id = (1)$	identitetsavbildningen
$[1^2 2]$	6	udda	$(1\ 2)$	spegling i ett plan innehållande kanten 34
$[2^2]$	3	jämna	$(1\ 2)(3\ 4)$	rotation π kring en axel genom 12:s och 34:s mittpunkter
$[13]$	8	jämna	$(1\ 2\ 3)$	rotation $\pm \frac{2\pi}{3}$ kring en axel genom 4
$[4]$	6	udda	$(1\ 2\ 3\ 4)$	rotation $\pm \frac{\pi}{2}$ kring en axel genom 13:s och 24:s mittpunkter, följt av en spegling i ett plan vinkelrätt mot axeln

b. Jämna permutationer svarar mot rotationer, udda mot avbildningar som innehåller (ett udda antal) speglingar.

c. N är (ändlig och) sluten under gruppoperationen, alltså en delgrupp.

$$(1\ 2)N = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\} = N(1\ 2)$$

$$(1\ 3)N = \{(1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\} = N(1\ 3)$$

$$(1\ 4)N = \{(1\ 4), (2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2)\} = N(1\ 4)$$

$$(1\ 2\ 3)N = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (2\ 4\ 3)\} = N(1\ 2\ 3)$$

$$(1\ 3\ 2)N = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4)\} = N(1\ 3\ 2)$$

Alla vänstersidoklasser är alltså högersidoklasser (också N själv, förstås), så N är en normal delgrupp.

(Att N är normal följer också av att $gNg^{-1} = \{gng^{-1} \mid n \in N\}$ och N består av hela konjugatklasser ($[1^4]$ och $[2^2]$) av element i G .)

Eftersom operationen i kvotgruppen G/N ges av $(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$ och varje sidoklass innehåller precis en permutation π med $\pi(4) = 4$, är G/N isomorf med gruppen av dem, så med S_3 , $G/N \approx S_3$.

6. Upprepad polynomdivision, analogt med heltal uttryckta i bas t .

$$x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2} = (x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{7}{6})(x^2 + x + \frac{1}{2}) + \frac{7}{12}x + \frac{7}{12},$$

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{13}{6}x - \frac{7}{6} = (x - \frac{1}{3})(x^2 + x + \frac{1}{2}) + 2x - 1,$$

$$\text{Så } b_2(x) = x - \frac{1}{3}, \quad b_1(x) = 2x - 1, \quad b_0(x) = \frac{7}{12}x + \frac{7}{12}.$$

7. Vi använder att om $z \in \mathbb{Z}[i]$ är irreducibelt (ett gaussiskt primtal) måste $|z|^2$ vara ett "vanligt" primtal eller kvadraten av ett och om $|z|^2$ är ett "vanligt" primtal eller kvadraten av ett som är $\equiv_4 3$ är z ett gaussiskt primtal.

(I själva verket gäller att om $|z|^2 = p^2$, p ett "vanligt" primtal $\equiv_4 1$, är z inte ett gaussiskt primtal, men det har vi inte visat än.)

Eftersom $|2+i|^2 = 5$, $|3+i|^2 = 10$, $|4+i|^2 = 17$, $|5|^2 = 25$, $|7|^2 = 49 = 7^2$, $|4+3i|^2 = 25$, $15 = 3 \cdot 5$, $|7-i|^2 = 50$, $|8+i|^2 = 65 = 5 \cdot 13$ ger det att $2+i$, $4+i$ och 7 är gaussiska primtal, att $3+i$, 15 , $7-i$ och $8+i$ inte är det och att 5 och $4+3i$ måste undersökas (i själva verket inte gaussiska primtal enligt ovan). För att finna faktoriseringar använder vi att $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$.

$3+i$ måste ha en primfaktor z_1 med $|z_1|^2 = 2$. Vi dividerar med $1+i$ och finner att $3+i = (1+i)(2-i)$, där båda faktorerna är irreducibla.

$5 = 2^2 + 1^2$, så $5 = (2+i)(2-i)$, båda faktorerna gaussiska primtal.

Om $4+3i = z_1 z_2$ och $|z_{1,2}| \neq 1$ måste $|z_1| = |z_2| = 5$. Vi prövar med $2 \pm i$ och finner att $(2+i) \nmid (4+3i)$, men $4+3i = (2-i)(1+2i) = i(2-i)^2$.

3 är ett gaussiskt primtal, men $5 = (2+i)(2-i)$, så $15 = 3(2+i)(2-i)$, faktorerna primtal.

$|7-i|^2 = 2 \cdot 5^2$. Vi prövar med en faktor $1+i$ (med $|1+i|^2 = 2$) och finner att $7-i = (1+i)(3-4i) = (1+i)(2-i)^2$.

$8+i$ måste ha en faktor med $|z|^2 = 5$, så vi prövar med $2 \pm i$ och finner $8+i = (2-i)(3+2i)$.

8. Euklides algoritm.

$$21 + 37i = (1+i)(26+12i) + (7-i),$$

$$26 + 12i = (3+2i)(7-i) + (3+i),$$

$$7-i = (2-i)(3+i) + 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Den första kvoten fås enklast "för hand",} \\ 21 + 37i &= 1 \cdot (26+12i) + (-5+25i) = \\ &= (1+i)(26+12i) + (7-i). \\ \text{För den andra, finn } \frac{26+12i}{7-i} &= \frac{1}{10}(34+22i) \end{aligned}$$

så $\text{sgd}(21 + 37i, 26 + 12i) = 3 + i$.

"Baklänges":

$$\begin{aligned} 3+i &= (26+12i) - (3+2i)(7-i) = \\ &= (26+12i) - (3+2i)((21+37i) - (1+i)(26+12i)) = \\ &= (-3-2i)(21+37i) + (1+(3+2i)(1+i))(26+12i) = \\ &= (-3-2i)(21+37i) + (2+5i)(26+12i), \end{aligned}$$

så vi kan ta $\alpha = -3 - 2i$, $\beta = 2 + 5i$.

9*. Genererande funktioner. Om $a_1, a_2, \dots$ och $b_1, b_2, \dots$ är antalen sidor med $1, 2, \dots$ ögon på de två tärningarna och polynomen $f(x), g(x)$ ges av $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$ gäller (varför?) $f(x)g(x) = (1+x+x^2+\dots+x^5)^2 = \frac{1}{(x-1)^2}(x^6-1)^2 = \frac{(x^3+1)^2(x^3-1)^2}{(x-1)^2} = (x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2$. Dessa faktorer kan inte faktoriseras mer som reella polynom, så (entydig faktorisering och alla a_n, b_n är naturliga tal) $f(x)$ och $g(x)$ skall "dela på" de sex faktorerna. Eftersom $f(1) = g(1) = 6$ måste båda innehålla $(x+1)(x^2+x+1)$, så den enda möjligheten att få "ovanliga" tärningar är med $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)$, $g(x) = (x+1)(x^2+x+1)$ (eller tvärtom), dvs $f(x) = x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$, $g(x) = x^3+2x^2+2x+1$. Alla koefficienter är här naturliga tal (inga är negativa), så det finns precis en möjlighet till ovanliga tärningar med den önskade egenskapen. Den ena tärningen skall ha 1, 3, 4, 5, 6, 8 ögon på sidorna och den andra 1, 2, 2, 3, 3, 4.