

Exempel för övning 8, den 1 april 2015

1. Det går att fylla i vidstående tabell så att den blir multiplikationstabellen för en grupp, dess gruppställ. Gör det.

$*$	a	b	c	d	f	g
a			c			
b					d	c
c		f		g		
d				a		b
f		c	d			
g					a	
- a. Är gruppen abelsk?
- b. Vilket element är identitetsselement?
- c. Bestäm inverser till alla element.
- d. Bestäm ordningen för varje element i gruppen.
- e. Beräkna $a * b * c * d * f * g$. (Behövs här inga parenteser?)
2. Låt G vara en grupp med identitetsselementet 1 och $a, b, c \in G$.
 - a. Givet att det finns ett $x \in G$ som uppfyller $\begin{cases} ax^2 = b \\ x^3 = 1, \end{cases}$ finn alla sådana x .
 - b. Givet att det finns $x \in G$ som uppfyller $\begin{cases} (xax)^3 = bx \\ x^2a = (xa)^{-1}, \end{cases}$ finn dem alla.
 - c. Visa $bac = a^{-1} \Rightarrow cab = a^{-1}$.
 - d. Visa $(abc)^{-1} = abc \Rightarrow (bca)^{-1} = bca$.
 - e. Visa att $a^3 = 1 \Rightarrow a$ har en kvadratrots, dvs för ett $r \in G$ gäller $a = r^2$.
 - f. Visa att $b^2ab = a^{-1} \Rightarrow a$ har en kubikrots, dvs för ett $s \in G$ gäller $a = s^3$.
3. $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ och $(U(\mathbb{Z}_{14}), \cdot)$ är grupper. $U(\mathbb{Z}_n)$ består av de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_n$. Undersök om någon av grupperna är cyklisk.
4. Gruppen $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$ är cyklisk. Bestäm alla dess generatorer.
5. Låt $G_1 = (\mathbb{Z}_8, +)$ och $G_2 = (U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$, där $U(\mathbb{Z}_{15})$ består av de inverterbara elementen i $\mathbb{Z}_{15}$.
 - a. Skriv upp gruppställerna för G_1 och G_2 .
 - b. Bestäm ordningen för alla element i G_1 och G_2 .
 - c. Finn alla cykliska delgrupper till G_1 och G_2 och deras sidoklasser.
 - d. Finn alla delgrupper till G_1 och G_2 och deras sidoklasser.
 - e. Är någon av grupperna G_1 och G_2 cyklisk?

6.** 100 personer (alla med olika namn) får ett märkligt erbjudande.

I ett rum står, får de veta, 100 lådor, numrerade från 1 till 100. Var och en av personerna får skriva sitt namn på en lapp och de hundra lapparna fördelas slumpmässigt i lådorna, en i varje låda.

Varje person skall sedan gå in i rummet och läsa namnet i en av lådorna. Om det inte är hans eget namn får han försöka en annan låda osv. Om han finner sitt eget namn genom att titta på högst 50 av dem, har han lyckats och skall lämna rummet precis som han fann det (och inte kommunicera med de andra) och nästa person komma in och försöka.

Om de **alla** lyckas, dvs finner lappen med sitt eget namn, får de säckvis med guldpengar att dela på, annars (om en enda av dem misslyckas) får de ingenting.

a. Vad är sannolikheten att de skall få pengarna om de inte heller får ha kontakt innan de går in (och saknar andra ledtrådar, typ röntgenblick)?

b. Visa att de om de i förväg får bestämma en gemensam strategi kan öka sannolikheten att de skall få pengarna till över 30%(!).