

Svar till övning 7, den 6 mars 2015

1a. $\varphi = (1\ 6\ 4\ 5\ 2)(3\ 8\ 7)$, $\psi = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 8\ 5)(6)$

b. $\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5)(2\ 7\ 8)(4\ 6)$,

$$\psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 6)(2\ 7\ 4)(3\ 5\ 8)$$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4\ 6)(3\ 7\ 8)$$

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 7)(2\ 5\ 8)(6)$$

2a. $\pi = (1)(2\ 4\ 10\ 6\ 5)(3\ 7\ 8\ 11\ 9)(12)$.

Det sökta antalet är $o(\pi) = \text{mgm}(1, 5, 5, 1) = 5$.

b. Man får $\pi = (0)(1\ 3\ 9\ 5\ 4)(2\ 6\ 7\ 10\ 8)(11)$, så $\pi(i) \equiv 3 \cdot i \pmod{11}$. Det sökta antalet är $o(3)$ i $U(\mathbb{Z}_{11})$ (som är 5).

c. Som i b. finner man att $\pi(i) \equiv n \cdot i \pmod{mn-1}$. Det sökta antalet är $o(n)$ i $U(\mathbb{Z}_{mn-1})$, speciellt är (som vi kommer att se när vi studerat lite mer om grupper) det alltid en delare till $|U(\mathbb{Z}_{mn-1})|$ och därmed $\leq |U(\mathbb{Z}_{mn-1})|$.

d. En riffelblandning där översta och understa korten ligger kvar är fallet $m = 26, n = 2$, då är det sökta antalet $o(2)$ i $U(\mathbb{Z}_{51})$. Man finner $o(2) = 8$.

(Bättre, som vi snart lär oss: eftersom $|U(\mathbb{Z}_{51})| = 32$, måste $o(2)$ vara (1,) 2, 4, 8, 16 eller 32. Prövning ($2^2 = 4$, $2^4 = 4^2 = 16$, $2^8 = 16^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_{51}$) visar att det i det fallet krävs 8 blandningar.)

Den andra typen av riffelblandning, där det översta kortet hamnar näst överst, är fallet $m = 27, n = 2$ (tänkta "extrakort" överst och underst). Det sökta antalet är då $o(2)$ i $U(\mathbb{Z}_{53})$. Med lite ansträngning finner man $o(2) = 52$ i detta fall.

(Återigen, bättre med mer teori som vi snart lär oss: eftersom $|U(\mathbb{Z}_{53})| = 52$, måste $o(2)$ vara (1,) 2, 4, 13, 26 eller 52. Prövning ($2^2 = 4$, $2^4 = 4^2 = 16$, $2^{13} = 2^8 \cdot 2^4 \cdot 2 = 16^2 \cdot 16 \cdot 2 = 44 \cdot 16 \cdot 2 = 30$, $2^{26} = 30^2 = 52 = -1$) ger att det nu krävs 52 blandningar.)

3. Låt $\pi \in S_6$ ges av att $\pi(x) = y$ omm brodern till kvinnan i hus x bor i hus y . Systemen till mannen i hus x bor då i hus $\pi^{-1}(x)$.

Inga syskon bor i samma hus (dvs är gifta med varandra) eller i grannhus, så för alla $x = 1, 2, \dots, 6$ gäller $\pi(x) \neq x, x \pm 1$. Speciellt saknar π 1-cykler, så dess cykelstruktur är någon av $[6]$, $[42]$, $[3^2]$ och $[2^3]$. Men $\pi(1) = \pi^{-1}(1)$ och $\pi(2) \neq \pi^{-1}(2)$, så 1, men inte 2, ingår i en 2-cykel. **π :s typ är alltså $[42]$.**

a. 2:s cykel består av fyra av husen 2–6 (inte 1, ty 1 ingår inte i den cykeln). Eftersom x och $\pi(x)$ inte kan vara grannhus, kan tre hus i rad inte ingå i en 4-cykel (det mellersta skall ha olika hus före och efter sig i cykeln, endera vore ett grannhus), så den måste bestå av husen 2, 3, 5 och 6. 2-cykeln är alltså (1 4) och **Anna bor i hus 4.**

b. Vi skall finna $\pi(x)$ för alla $x = 1, 2, \dots, 6$ och vet redan $\pi(4) = 1$, $\pi(1) = 4$. 2, 3, 5, 6 bildar en 4-cykel och $\pi(6) \neq 2, 5$ (Börje är inte Cecilias bror, Cecilia inte granne med sin bror), så $\pi(6) = 3$ och därmed $\pi(3) = 5$ (inte grannhuset 2) och $\pi(5) = 2$, $\pi(2) = 6$, så $\pi = (1\ 4)(2\ 6\ 3\ 5)$ och svaret:

Frun i hus	1	2	3	4	5	6
har sin bror i hus	4	6	5	1	2	3

4a. I cykelform fås $\pi = (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9\ 8)(4\ 5)$, så $o(\pi) = \text{mgm}(3, 4, 2) = 12$.

b. En cykel $(x_1\ x_2 \dots x_k)$ kan skrivas $(x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1}) \dots (x_1\ x_2)$, så man får (bland andra möjligheter) med π enligt ovan att

$$\pi = (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9\ 8)(4\ 5) = (1\ 2)(1\ 7)(3\ 8)(3\ 9)(3\ 6)(4\ 5).$$

Eftersom antalet transpositioner är jämnt, är π en jämn permutation. Det ses också av att antalet cykler av jämn längd (2 st) är jämnt och av att ” n ” (9) – antalet cykler (3) är jämnt.

$$5. \chi = \pi^{-1}\sigma = (1\ 2\ 7)(3\ 8\ 9\ 6)(4\ 5)(1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4) = (1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9),$$

$$\psi = \sigma\pi^{-1} = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4)(1\ 2\ 7)(3\ 8\ 9\ 6)(4\ 5) = (1\ 4\ 3)(2\ 7\ 5)(6\ 9\ 8).$$

Bara χ och ψ har samma cykelstruktur (lika många cykler av varje längd), så bara de är konjugerade (eftersom $\psi = \sigma\pi^{-1} = \pi\chi\pi^{-1}$).

σ innehåller 2 udda cykler (cykler av jämn längd), så den är en jämn permutation. π är jämn, så det är π^{-1} också, liksom $\chi = \pi^{-1}\sigma$ och $\psi = \sigma\pi^{-1}$.