

Exempel för övning 7, den 6 mars 2015

1. Låt φ och ψ beteckna nedanstående permutationer (givna på tvåradsform) på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Skriv permutationerna φ och ψ som produkter av disjunkta cykler.
 - Beräkna $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{-1} och ψ^{-1} , dels på tvåradsform och dels på cykelform.
2. 12 kort ligger ordnade rektangulärt, i 4 rader och 3 kolumner. Korten plockas upp radvis och läggs sedan ut kolumnvis i samma ordning, så att korten flyttas som i figuren.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{array} \longmapsto \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}$$

- Efter hur många upprepningar av detta är alla kort åter i utgångsläget? Numrera positionerna som till vänster och beskriv operationen med $\pi \in S_{12}$, där $\pi(i) = j$ betyder att kortet i position i hamnar i position j (dvs $\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 4, \dots$).
 - Numrera i stället positionerna $0, 1, 2, \dots, 11$ och visa hur permutationen kan beskrivas med moduloräkning.
 - Vilket villkor bestämmer antalet nödvändiga upprepningar om det är m rader och n kolumner?
 - Hur många gånger måste en perfekt riffelblandning av en kortlek upprepas för att alla korten skall komma till utgångsläget (två fall)?
3. I en radhuslänga med sex hus (med nr, i ordning, 1–6) bor sex gifta par (vart och ett bestående av en kvinna och en man), ett par i varje hus. Var och en av kvinnorna har också (precis) en bror bland de sex männen och omvänt. Ingen bor granne med, eller är gift med, sin syster eller bror. Anders har bara ett grannhus och bara en svåger (Anders bor i det ena gavelhuset, nr 1, och hans frus bror är hans systems man). Anders granne Börje däremot, har både två grannhus (förstås) och två svågrar (båda bosatta i radhuslängan).
- I vilket hus bor Anders syster Anna?
 - I det andra gavelhuset, nr 6, bor Cecilia med sin man. Börjes syster heter Birgitta. Ange var vart hus frus bror bor.

4. Betrakta permutationen $\pi \in S_9$, som på tvåradsform ges av

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 9 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Bestäm π :s ordning.

b. Skriv π som en produkt av transpositioner.

Är π en jämn eller en udda permutation?

Verifiera genom att räkna cykler i π .

5. Finn permutationer χ, ψ så att $\pi\chi = \sigma$, $\psi\pi = \sigma$, med π som ovan och

$$\sigma = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4) \quad (\text{cykelform}).$$

Vilka av χ , π , ψ och σ är konjugerade? Varför?

Avgör om χ , ψ och σ är jämna eller udda permutationer.

6**. 100 personer har biljett till varsin av de 100 platserna i en biosalong. Den som går in först har dock tappat sin biljett och sätter sig på en slumpmässigt (likafördelat) vald plats. Var och en av de övriga sätter sig på sin egen plats om den är ledig, annars på en lika slumpmässigt vald (ledig) plats.

Vad är sannolikheten att den som kommer in sist hamnar på sin egen plats?

Att den k :e personen från slutet hamnar rätt?

7**. Tre personer får veta att de samtidigt skall få varsin hatt på huvudet, var och en med sannolikhet $\frac{1}{2}$ en röd och sannolikhet $\frac{1}{2}$ en blå hatt, de olika hattarnas färger oberoende. De kan se de två andras hattar, men inte sin egen. De ges chansen att gissa färgen på sin egen hatt, men kan avstå från att gissa om de vill. Om (och endast om) minst en gissar rätt färg på sin egen hatt och ingen gissar fel, får de ett pris. De får inte veta om eller vad de övriga gissar. Hur stor sannolikhet att vinna kan de få, om de i förväg kan komma överens om en strategi för gissandet? Om de t.ex. bestämmer att A skall gissa "röd" och att B och C skall avstå, har de tydligen sannolikheten $\frac{1}{2}$ att vinna, men kan de öka sannolikheten?