

Svar till övning 5, den 20 februari 2015

1. $2646000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$, så (multiplikationsprincipen) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ st olika positiva delare.
2. $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ st (multiplikationsprincipen; 5 möjliga slutsiffror, då 8 möjliga tusentalssiffror etc).
Observera att det är viktigt i vilken ordning man "väljer" siffrorna, om man inte börjar med entalssiffrorna kommer antalet möjliga val av dem att bero av redan gjorda val!
3. På $13! - 2 \cdot 13 \cdot 11! = 13 \cdot 10 \cdot 11! (= 5189184000)$ sätt.
- 4*. En bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ ges av $f(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid r_i = 1\}$, där $\sum_{i=0}^{\infty} r_i 2^i$ är den binära utvecklingen av n , så $r_i = 0$ utom för ändligt många i .
- 5*. Ingen. Varje boll har ju tagits ur och kastats bort.
6. Det finns $\binom{5}{3} \cdot 10^3 \cdot (5)_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 600000$ olika sådana följder (3 av 5 möjliga positioner med siffror, de kan väljas på 10^3 sätt och bokstäverna på $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$ sätt).
- 7a. På $\binom{15}{4} \binom{11}{1} + \binom{15}{3} \binom{11}{2} + \binom{15}{2} \binom{11}{3} (= 57365)$ sätt.
b. Från antalet i a. skall dras $\binom{14}{3} \binom{10}{0} + \binom{14}{2} \binom{10}{1} + \binom{14}{1} \binom{10}{2} = \binom{24}{3} - \binom{10}{3} (= 1904)$ sätt. Svaret blir 55461.
8. Båda leden ger antalet sätt att välja ut k element från en disjunkt union av en m -mängd och en n -mängd.
Påståendet kan också visas med induktion över m (eller n).
9. Beräkna $\int_0^1 (1+x)^n dx$ på två sätt **eller** visa och använd att $\frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{i+1}$ etc.
10. Summan är fibonaccitalet F_{n+1} . Visas med induktion över n , nog enklast genom att visa att summan uppfyller samma rekursionsekvation som $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ (ses i Pascals triangel eller, mer formellt, genom att notera att summan kan skrivas $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n-k}{k}$) och finna begynnelsevärdena (1 för $n = 0$ och $n = 1$).
Man kan också se det genom att tolka F_{n+1} som antalet sätt att lägga en $2 \times n$ -trädgårdsgång med 2×1 -plattor. $\binom{n-k}{k}$ är antalet sätt att välja ut vilka $2k$ stenar som skall ligga på längden.
11. En följd singlar med utfall $s_1, s_2, s_3, \dots$ ger likafördelade "binaltal" $x = 0, s_1 s_2 s_3 s_4 \dots \in [0, 1]$. Expressen om $x < \alpha$, Aftonbladet om $x > \alpha$. Det avgörande är det s_i som först avviker från α :s i :te "binal". Om det s_i :et är 0 är $x < \alpha$, om det är 1 är $x > \alpha$. Sannolikheten att något s_i avviker från α :s motsvarande "binal" är 1.