

Exempel för övning 5, den 20 februari 2015

1. Hur många positiva delare till talet 2646000 finns det?
2. Hur många udda tal mellan 1000 och 10000 har (bas 10) alla siffror olika?
3. På hur många sätt kan 13 personer placeras på 13 olika stolar kring ett runt bord, utan att Lisa och Olle (som är bland de 13) sitter bredvid varandra?
- 4*. Enligt den sats av Cantor som presenterades på föreläsningen är potensmängden till $\mathbb{N}$ inte uppräknelig, dvs det finns överuppräkneligt många mängder av naturliga tal, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.

Visa att antalet **ändliga** mängder av naturliga tal är uppräkneligt, dvs

$$|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|,$$

där $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty\}$.

Ledning: Det finns en enkel bijektion mellan $\mathbb{N}$ och $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. Tänk binära tal!

5*. (En klassisk illustration av märkligheter med oändligheten.)

Vi har en (stor) låda och ett (uppräkneligt) oändligt antal bollar, numrerade 0, 1, 2, ... Från början ligger bara boll nummer 0 i lådan.

Vid varje tidpunkt $t = -\frac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tar vi ut och kastar bort den lägst numrerade bollen och lägger i alla återstående bollar upp till nummer 2^n .

Under allt kortare intervall kommer alltså följande bollar att ligga i lådan:

$$0; \quad 1; \quad 2; \quad 3, 4; \quad 4-8; \quad 5-16; \quad 6-32; \quad 7-64; \quad 8-128; \dots$$

Hur många bollar ligger i lådan vid $t = 0$ (efter ett oändligt antal operationer)?

6. Hur många följder med tre siffror och tre bokstäver bland A, B, C, D, E kan man bilda, om den skall inledas med en bokstav och ingen bokstav får vara med mer än en gång (t.ex. CD2A09, D07B0E, ABC444, men inte 123ABC eller B30A4B)?

7. Bland de totalt 26 medlemmarna (15 kvinnor och 11 män) i en förening skall en grupp med 5 representanter utses.

a. På hur många sätt kan gruppen sättas samman, om den skall innehålla minst 2 kvinnor och minst 1 man?

b. På hur många sätt går det om det dessutom finns två personer, fru A och herr B, som inte båda samtidigt kan vara med i gruppen av representanter?

8. Visa med ett kombinatoriskt resonemang att om $k, m, n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \dots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Vad får man för $m = 1$, $k \geq 1$?

(Då $r, s \in \mathbb{Z}$ och $r < 0$, $s < 0$ eller $r < s$ låter vi $\binom{r}{s} = 0$.)

9. Visa att om $n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\frac{1}{1} \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

10*. Vad är för $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}?$$

Visa det. ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ är heltalsdelen av $\frac{n}{2}$, det största heltalet som är $\leq \frac{n}{2}$.)

11*. Givet α med $\alpha \in [0, 1]$ och ett "rättvist" mynt, dvs ett som ger 0 och 1 med sannolikhet $\frac{1}{2}$ vardera (med singlarernas resultat oberoende), hur kan man åstadkomma sannolikhet α ? Dvs hur kan man välja Expressen med sannolikhet α och Aftonbladet med sannolikhet $1 - \alpha$?

12.** På en föreläsning visades att om man utgår från 6 punkter och mellan varje par av dem drar antingen en röd eller en blå linje, uppstår minst en enfärgad triangel.

a. Visa att det i själva verket blir minst två enfärgade trianglar.

b. Visa att om man i stället utgår från 10 punkter och gör på samma sätt, uppstår antingen en helt röd triangel eller en helt blå "tetraeder" (dvs fyra punkter som alla parvis är förbundna med blå linjer).

c. Visa att det i **b** räcker med 9 punkter.