

Svar till övning 4, den 13 februari 2015

- $\mathcal{R}$ är inte reflexiv, ty $(d, d) \notin \mathcal{R}$.
 $\mathcal{R}$ är inte symmetrisk, ty $(a, b) \in \mathcal{R}$, $(b, a) \notin \mathcal{R}$.
 $\mathcal{R}$ är inte anti-symmetrisk, ty $(c, d) \in \mathcal{R}$, $(d, c) \in \mathcal{R}$, men $c \neq d$.
 $\mathcal{R}$ är inte heller transitiv, ty $(d, c) \in \mathcal{R}$, $(c, d) \in \mathcal{R}$, men $(d, d) \notin \mathcal{R}$.
- Alla mängder människor där ingen syskonskara är tvåkönad.
- Minimala exempel:
 $\mathcal{R}_a = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$,
 $\mathcal{R}_b = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b)\}$,
 $\mathcal{R}_c = \emptyset$.
- $\subseteq$ är en partialordning (dvs reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv) på varje mängd av mängder, här på $X = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
 $\{1\}$ och $\{2\}$ är minimala element, det finns inget minsta element.
 $\{1, 2, 3\}$ är största element och (därmed) enda maximalt element.
- Om $\mathcal{R}$ är både symmetrisk och antisymmetrisk gäller att $a\mathcal{R}b \Rightarrow a = b$. Om $\mathcal{R}$ är reflexiv gäller $a = b \Rightarrow a\mathcal{R}b$. Å andra sidan är likhetsrelationen en ekvivalensrelation och en partialordning. Så $\mathcal{R}$ är likhetsrelationen på A , med mängden av ekvivalensklasser $\{\{a\} \mid a \in A\}$.
- 6a. Ingendera, b. bara injektiv, c. bara surjektiv, d. alla fyra.
- Man finner värdena:

a.	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	så detta f har ingen av
	$x^3 + 3x + 7$	7	2	3	7	2	3	7	2	3,	egenskaperna.
b.	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	så detta f har alla fyra egen-
	$x^3 + 4x + 5$	5	1	3	8	4	6	2	7	0,	skaperna.
c.	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	så detta f har ingen av
	$x^3 + 5x + 4$	4	1	4	1	7	1	7	4	7,	egenskaperna.
- Eftersom $\text{sgd}(1632, 4711) = 1$ är 1632 inverterbar i $\mathbb{Z}_{4711}$, så f är inverterbar ($f^{-1}(x) = 1632^{-1}(x - 1792)$) och därmed bijektiv, vilket medför att den också är injektiv och surjektiv.
- $f(x) = x^2 + 1721x + 1066 = x^2 + (1721 + 4711)x + 1066 = x^2 + 2 \cdot 3216x + 3216^2 - 3216^2 + 1066 = (x + 3216)^2 - 3216^2 + 1066$, så $f(4711 - 3216 + 1) = f(4711 - 3216 - 1)$ och f är inte injektiv. Den är alltså ($\mathbb{Z}_{4711}$ är ändlig) inte heller surjektiv, bijektiv (= injektiv och surjektiv) eller inverterbar (= bijektiv).
- Minsta exemplet: $|X| = |Z| = 1$, $|Y| = 2$, f, g godtyckliga funktioner. Med mängderna lika: $X = Y = Z = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = \max(x - 1, 0)$. (Om gf är injektiv måste f vara injektiv och om gf är surjektiv måste g vara surjektiv. I det sökta exemplet kan f alltså inte vara surjektiv och g inte injektiv (ingen av dem skall ju vara bijektiv).)

11. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = x_2$, så f är injektiv.

Varje $x = f(f(x))$, så f är surjektiv. f är injektiv och surjektiv, så bijektiv.

(Eller $ff = id_A$ betyder att $f = f^{-1}$, f har en invers, så f är bijektiv.)

12a. Nej, ty eftersom $\mathbb{Q}$ är uppräknelig och $\mathbb{R}$ är överuppräknelig finns ingen injektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ (och ingen surjektion $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$),

b. ja, t.ex. $f(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.