

### Exempel för övning 4, den 13 februari 2015

1. Den binära relationen  $\mathcal{R}$  på mängden  $X = \{a, b, c, d\}$  ges av

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c)\}.$$

Avgör om  $\mathcal{R}$  är reflexiv, symmetrisk, anti-symmetrisk och/eller transitiv.

2. För vilka mängder av människor gäller att relationen "är syster till" är symmetrisk?

3. Låt  $X = \{a, b, c, d\}$  och ge exempel på en relation på  $X$  som är

- a. reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv,
- b. reflexiv och transitiv, men inte symmetrisk,
- c. symmetrisk och transitiv, men inte reflexiv.

4. Låt  $A = \{1, 2, 3\}$  och  $X = \{B \subseteq A \mid 1 \in B \text{ eller } 2 \in B \text{ (eller båda)}\}$ .

Visa att relationen  $\subseteq$  på  $X$  är en partialordning. Finn alla minimala, minsta, maximala och största element i  $X$  med denna ordning.

5. Låt  $A$  vara en mängd och beskriv alla relationer på  $A$  som både är ekvivalensrelationer och partialordningar. Vilka är ekvivalensklasserna?

6. Avgör om sambandet  $f(x) = x^2$  definierar en injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar funktion i följande fall

- a.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$    b.  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,   c.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$    d.  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  
 $\mathbb{R}_{\geq 0}$  betecknar här de icke-negativa reella talen  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ .

7. Är  $f : \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9$  injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar då

- a.  $f(x) = x^3 + 3x + 7$ ,   b.  $f(x) = x^3 + 4x + 5$ ,   c.  $f(x) = x^3 + 5x + 4$

8. Avgör om  $f : \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$ ,  $f(x) = 1632x + 1792$  är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.

9. Avgör om  $f : \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$ ,  $f(x) = x^2 + 1721x + 1066$  är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.

10. Ge exempel på mängder  $X, Y, Z$  och funktioner  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , så att sammansättningen  $gf : X \rightarrow Z$  är en bijektion, trots att varken  $f$  eller  $g$  är det.

Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att  $X = Y = Z$ .

11. Låt  $A$  vara en mängd och  $f : A \rightarrow A$  en funktion sådan att  $ff = id_A$ , dvs  $f(f(x)) = x$  för alla  $x \in A$ . Visa att  $f$  är en bijektion.

- 12a. Finns det  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$  och  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , så att  $gf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  är en bijektion?  
b. Finns det  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ , så att  $gf : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  är en bijektion?

- 13\*. Två fyrar blinkar med intervall  $\alpha$  respektive  $\beta$  (minuter).  $\alpha$  och  $\beta$  är irrationella tal sådana att  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  (dvs i medeltal kommer ett blink per minut). Visa att om de båda blinkar vid tiden  $t = 0$  kommer det under "heltalsminuten" mellan  $n - 1$  och  $n$  precis ett blink, för alla heltal  $n > 1$ .