Matematik, KTH
B.Ek

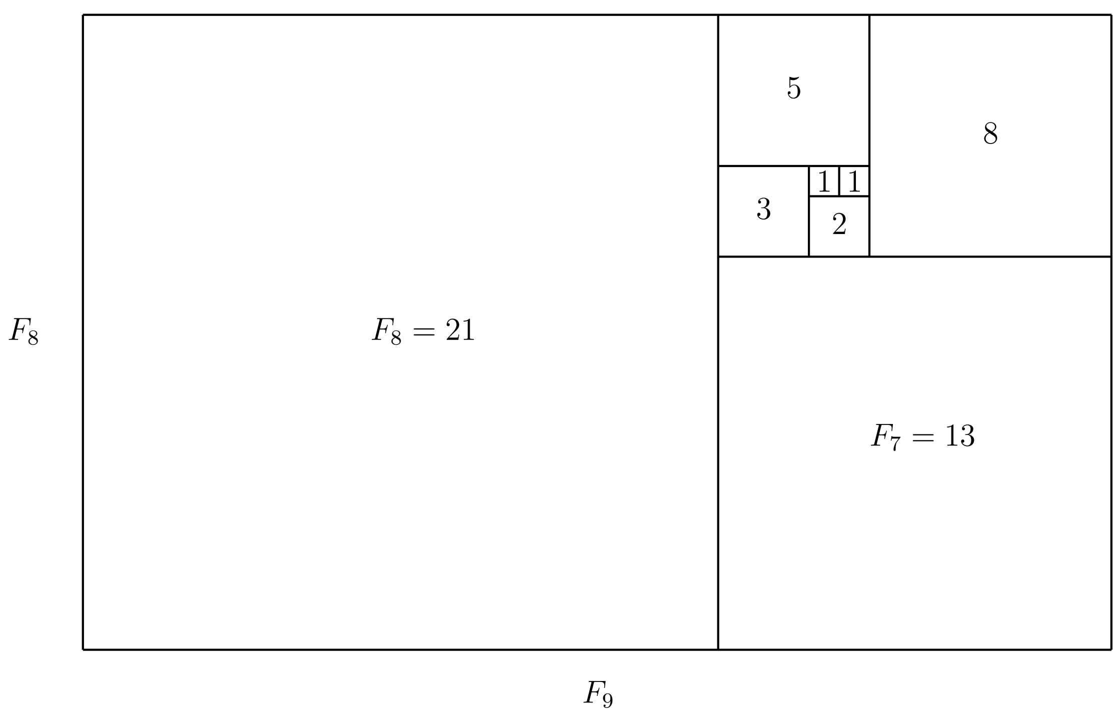
SF1662, Diskret matematik för
CLGYM1, TSVDK2, CELTE2
vt 2015

Svar till övning 3, den 6 februari 2015

1. Induktion över n.
Bas: $VL_1 = 1 \cdot 2 = 2$, $HL_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$, så påståendet är **sant för $\boldsymbol{n = 1}$**.
Steg: **Antag** (IA) att det stämmer för $n = k$, dvs $VL_k = HL_k$.
Då fås $VL_{k+1} = VL_k + (k+1)(k+2) \overset{IA}{=} HL_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2)(\frac{k}{3} + 1) = (k+1)(k+2)\frac{k+3}{3} = HL_{k+1}$, så om det stämmer för $n = k$, stämmer det också för $n = k + 1$, **steget är klart**.
Enligt **induktionsprincipen** gäller påståendet för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$
Saken är klar.

2. Induktion över k för kvadrat med sida 2^k. Tag bort en L-bit vid mitten, så att fyra 2^{k-1}-kvadrater med vardera en saknad ruta återstår etc.

3. Induktion. För a.: $F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} F_{k+2}$.
För b.: $F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 = F_k(F_k + F_{k+1}) - (F_{k-1} + F_k) F_{k+1} = -(F_{k-1} F_{k+1} - F_k^2)$.
Resultatet i a. åskådliggörs av figuren, som illustrerar hur en rektangel med sidor F_n och F_{n+1} kan delas upp i kvadrater med sidorna F_1, F_2, $\ldots$, F_n:



4. Vi visar påståendet $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$ för $n = 0, 1, \ldots$ med induktion.
För att det skall vara den "enkla" typen av induktion kan vi låta påsatåendet vara $a_n = \ldots$ **och** $a_{n+1} = \ldots$.
Bas: $a_0 = 5 = 2^{0+1} + 3(-1)^0$, $a_1 = 1 = 2^{1+1} + 3(-1)^1$, det **stämmer för $n = 0$ och $n = 1$**.
Steg: **Antag** (IA) att det stämmer för $n = k$ och $n = k+1$.
Då $a_{k+2} = a_{k+1} + 2a_k \overset{IA}{=} 2^{k+2} + 3(-1)^{k+1} + 2(2^{k+1} + 3(-1)^k) = 2 \cdot 2^{k+2} + 3(-(-1)^{k+2} + 2(-1)^{k+2}) = 2^{(k+2)+1} + 3(-1)^{k+2}$, så det **stämmer för** $n = k+2$.
Induktionsprincipen ger att **saken är klar**.

5. Se nästa sida.

6. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7\},\ B \cap C = \{1, 4\},\ B \setminus A = \{7\},\ A \setminus B = \{2\}$,
$\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, C\},\ C \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 7)\}$.
$C \nsubseteq A \cap B$ (ty $2 \in C$, $2 \notin A \cap B$), $C \in \mathcal{P}(A)$ (ty $C \subseteq A$),
$A \notin \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$ (ty $A \nsubseteq B$, $A \nsubseteq C$), $C \times B \subseteq A \times B$ (följer av $C \subseteq A$).

7. Med "räkneregler", $((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = ((A^c \cup B^c) \cap A^c)^c = (A^c)^c = A$ (med reglerna för absorption och dubbelt komplement).
Venndiagram går också bra.

8. $\Rightarrow$: Antag $A^c \cap B = \varnothing$ och låt $x \in B$. Då fås $x \notin A^c$ (ty $x \notin \varnothing$), så $x \in (A^c)^c$, dvs $x \in A$ (ty $x \in \mathcal{U}$). Således $x \in B \Rightarrow x \in A$, dvs $B \subseteq A$.
$\Leftarrow$: Antag $B \subseteq A$ och låt $x \in A^c \cap B$. Då $x \in B \subseteq A$ (så $x \in A$) och $x \in A^c$. Således $x \in A \cap A^c = \varnothing$, vilket är omöjligt, så sådana x finns inte, $A^c \cap B = \varnothing$.

9. Mängden $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ har 3 element, så dess potensmängd har $2^3 = 8$ element (som $\mathcal{P}(C)$ i uppgift 6). Mängden $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$ har 1 element, så dess potensmängd har $2^1 = 2$ element.
$\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$,
$\mathcal{P}(\{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}\}$.

10*. Sådana mängder kallas **transitiva**, så C är transitiv precis om $B \in C \Rightarrow B \subseteq C$, dvs precis om $C \subseteq \mathcal{P}(C)$, och också precis om $\cup C \subseteq C$ (där $\cup C$ är unionen av alla C:s element, $\cup C = \{A \mid A \in B$ för något $B \in C\}$).
Den första mängden i uppgift 9. är transitiv, liksom $\varnothing$.
Om C är transitiv är också $C \cup \{C\}$ transitiv, så man får en oändlig följd transitiva mängder från en, men inte alla transitiva mängder fås så från $\varnothing$. T.ex. är ju $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ transitiv.

5.

a.

1	(1)	$A \wedge B$	premiss	
2	(2)	$A \to C$	premiss	
3	(3)	$B \to D$	premiss	
1	(4)	A	1	$\wedge$E
1,2	(5)	C	2,4	$\to$E
1	(6)	B	1	$\wedge$E
1,3	(7)	D	3,6	$\to$E
1,2,3	(8)	$C \wedge D$	5,7	$\wedge$I

b.

1	(1)	$A \to (B \to C)$	premiss	
2	(2)	$A \wedge B$	premiss	
2	(3)	A	2	$\wedge$E
1,2	(4)	$B \to C$	1,3	$\to$E
2	(5)	B	2	$\wedge$E
1,2	(6)	C	4,5	$\to$E

c.

1	(1)	$(A \wedge B) \to C$	premiss	
2	(2)	A	antagande	
3	(3)	B	antagande	
2,3	(4)	$A \wedge B$	2,3	$\wedge$I
1,2,3	(5)	C	1,4	$\to$E
1,2	(6)	$B \to C$	3,5	$\to$I
1	(7)	$A \to (B \to C)$	2,6	$\to$I

d.

1	(1)	$A \to (B \to C)$	premiss	
2	(2)	$A \to B$	antagande	
3	(3)	A	antagande	
2,3	(4)	B	2,3	$\to$E
1,3	(5)	$B \to C$	1,3	$\to$E
1,2,3	(6)	C	5,4	$\to$E
1,2	(7)	$A \to C$	3,6	$\to$I
1	(8)	$(A \to B) \to (A \to C)$	2,7	$\to$I

e.

1	(1)	$\neg A$	premiss	
2	(2)	$A \wedge B$	antagande	
2	(3)	A	2	$\wedge$E
1,2	(4)	$\bot$	1,3	$\neg$E
1	(5)	$\neg(A \wedge B)$	2,4	$\neg$I

f.

1	(1)	$\neg(A \wedge \neg B)$	premiss	
2	(2)	A	antagande	
3	(3)	$\neg B$	antagande	
2,3	(4)	$A \wedge \neg B$	2,3	$\wedge$I
1,2,3	(5)	$\bot$	1,4	$\neg$E
1,2	(6)	$\neg\neg B$	3,5	$\neg$I
1,2	(7)	B	6	DN
1	(8)	$A \to B$	2,7	$\to$I

g.

1	(1)	A	premiss	
2	(2)	$\neg A$	premiss	
1,2	(3)	$\bot$	2,1	$\neg$E
4	(4)	$\neg B$	antagande	
1,2	(5)	$\neg\neg B$	4,3	$\neg$I
1,2	(6)	B	5	DN

h.

1	(1)	$(A \vee B) \to C$	premiss	
2	(2)	A	antagande	
2	(3)	$A \vee B$	2	$\vee$I
1,2	(4)	C	1,3	$\to$E
1	(5)	$A \to C$	2,4	$\to$I

i.

1	(1)	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	premiss	
2	(2)	$A \wedge B$	antagande	
2	(3)	A	2	$\wedge$E
4	(4)	$A \wedge C$	antagande	
4	(5)	A	4	$\wedge$E
1	(6)	A	1,2,3,4,5	$\vee$E

j.

1	(1)	$\bot$	antagande	
	(2)	$\neg\bot$	1,1	$\neg$I

Observera att siffrorna i den vänstraste kolumnen alltid är radnummer för premisser eller antaganden, de visar vilka av dem som använts för att härleda sentensen på den aktuella raden.
Rad 6 i uppgift d. illustrerar att de rader som gör att vi kan använda en viss regel inte behöver stå i samma ordning som i regeln (i $\to$E-regeln står implikationen (här rad 5) över förleden (här rad 4)).
I själva verket kan rader som står som olika i regeln vara samma rad, som i den slående deduktionen i uppgift j.
Rad 5 i uppgift g. illustrerar att beteckningen $\{a_1, \ldots, a_n\}/j$ i t.ex. $\neg$I-regeln betyder att radnummer j skall tas bort från $\{a_1, \ldots, a_n\}$ **om den finns med**. Här gör den inte det, men det går ändå bra att använda regeln. Uppgiften visar hur vad som helst kan bevisas utgående från en motsägelse.