Matematik, KTH
B.Ek

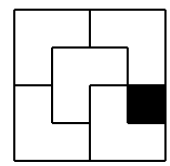
SF1662, Diskret matematik för
CLGYM1, TSVDK2, CELTE2
vt 2015

Exempel för övning 3, den 6 februari 2015

1. Visa, t.ex. med induktion, att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. En kvadrat med sida 1024 är uppdelad i 1024×1024 rutor med sida 1. Visa att om man tar bort en av dessa rutor, kan resten av kvadraten täckas av ”L-formade” bitar med 3 rutor.
I figuren visas ett möjligt fall för en kvadrat med sida 4.



3. Minns **fibonaccitalen** F_n: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, rekursivt definierade av

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

a. Visa att $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$
b. Visa att $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Låt följden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt av

$$\begin{cases} a_0 = 5,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Visa att $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$ för alla $n = 0, 1, \ldots$

5. Visa med naturlig deduktion (reglerna finns i stencilen ”Lite om bevis”)
a. $A \wedge B,\ A \to C,\ B \to D \ \vdash\ C \wedge D$,
b. $A \to (B \to C),\ A \wedge B \ \vdash\ C$,
c. $(A \wedge B) \to C \ \vdash\ A \to (B \to C)$,
d. $A \to (B \to C) \ \vdash\ (A \to B) \to (A \to C)$,
e. $\neg A \ \vdash\ \neg(A \wedge B)$,
f. $\neg(A \wedge \neg B) \ \vdash\ A \to B$,
g. $A, \neg A \ \vdash\ B$,
h. $(A \vee B) \to C \ \vdash\ A \to C$,
i. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \ \vdash\ A$,
j. $\vdash\ \neg\bot$.

6. Mängderna A, B, C ges av $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$, $C = \{1, 2, 4\}$.
Ange mängderna $A \cup B$, $B \cap C$, $B \smallsetminus A$, $A \smallsetminus B$, $\mathcal{P}(C)$, $C \times B$.
Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska: $C \subseteq A \cap B$, $C \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$, $C \times B \subseteq A \times B$. Motivera.

7. Visa, dels med räknereglerna på sidan 20 i läroboken (den första) och dels med ett Venndiagram, att för godtyckliga mängder A, B gäller

$$((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = A.$$

Minns att $M \setminus N$ kan uttryckas som $M \cap N^c$.

8. Gäller för alla mängder A och B att

$$A^c \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subseteq A?$$

Motivera.

9. Vad är $|\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\})|$?
Vad är $|\mathcal{P}(\{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\})|$?
Ange alla element i $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\})$ och i $\mathcal{P}(\{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\})$.

10*. Finns det någon mängd C så att för alla mängder A och B gäller

$$(A \in B \text{ och } B \in C) \Rightarrow A \in C?$$

Förklara varför ingen finns eller ge minst två exempel.

11**. Visa för fibonaccitalen $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ att $\text{sgd}(F_m, F_n) = F_{\text{sgd}(m,n)}$.